www.eShale.org ಇವರ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಯೋಜನೆ

ಗಣಿತ ಸೂತ್ರ

ತರಗತಿ ೮,೯,೧೦ರ ಗಣಿತ ಪಾಠಗಳಲ್ಲಿನ
ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳ ಕೈಪಿಡಿ

ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ಹಂತ + NTSE + ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆ ತಯಾರಿಗಾಗಿ

Ganita Sutra

A hand book on Mathematical definitions and formulae to prepare for

Class 8 to 10 + NTSE + Competitive exams

www.FREEganita.com

www.eShale.org ಇವರ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಯೋಜನೆ

ಗಣಿತ ಸೂತ್ರ

ತರಗತಿ 8,9,10ರ ಗಣಿತ ಪಾಠಗಳಲ್ಲಿನ
ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳ ಕೈಪಿಡಿ

ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ಹಂತ + NTSE + ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆ ತಯಾರಿಗಾಗಿ

Ganita Sutra

A hand book on Mathematical definitions and formulae to prepare for

Class 8 to 10 + NTSE + Competitive exams

GANITA SUTRA *(Kannada* & English*)*
By ***www.eShale.org***

Printed & *Published By* :
VARNILA, 39/2-11, Kalyani Garden, BSK 1st Stage, Bengaluru - 560050.

This book can be downloaded for free from :
www.freeganita.com/ganithasutra.pdf

First Edition	**: 2023**
Pages	**: IV + 48**
No. of Copies	**: 500**
Price	**: ₹ 100**

Paper used for this book : 80gsm, Maplitho 21.3 Kgs (1/8 Demmy Size)

ಮೊದಲ ಮುದ್ರಣ	: 2023
ಪ್ರತಿಗಳು	: 500
ಬೆಲೆ	**: ₹ 100**

ಮುಖಪುಟ ವಿನ್ಯಾಸ : ರಾಕೇಶ್ ಬಂಗೇರ

ಪ್ರಕಾಶನ ಮುದ್ರಣ :
ವರ್ಣಿಲ, ನಂ. 39/2–11, ಕಲ್ಯಾಣಿ ಗಾರ್ಡನ್,
ಬನಶಂಕರಿ 1ನೇ ಹಂತ, ಬೆಂಗಳೂರು 560050.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಉಚಿತವಾಗಿ
www.freeganita.com/ganithasutra.pdf
ಇಂದ ಡೌನ್ಲೋಡ್ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ವರ್ಣಿಲ

ಅರ್ಪಣೆ

- ಮನುಕುಲಕ್ಕೆ ಶೂನ್ಯ ಮತ್ತು ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದ ಅನಾಮಧೇಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ.
- 'ಪೈ' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೊತ್ತ ಮೊದಲಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅದೊಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಸಾರಿದ ಗಣಿತ ವಿದ್ವಾಂಸ ಆರ್ಯಭಟರಿಗೆ (ಕ್ರಿ.ಶ 476).
- ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತ ಗ್ರಂಥ 'ಲೀಲಾವತಿ' ರಚಿಸಿದ ವಿದ್ವಾಂಸ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರಿಗೆ (ಕ್ರಿ.ಶ. 1160).
- ನನಗೆ ಗಣಿತ ಕಲಿಸಿದ ಅಧ್ಯಾಪಕರುಗಳಿಗೆ.

– ಕೋಟ ರಾಜಶೇಖರ ಸೋಮಯಾಜಿ

ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು

* ನನ್ನ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾಜಮುಖಿ ಯೋಜನೆಗಳ ವಿನ್ಯಾಸ, ಮುದ್ರಣ, ಪ್ರಕಾಶನ, ಪ್ರಚಾರ, ಮಾರಾಟ ಹಾಗೂ ಇನ್ನೂ ಹಲವು ಬಗೆಯ ಜವಾಬ್ದಾರಿಯನ್ನು ಹೊತ್ತುಕೊಂಡು ಹೆಗಲಿಗೆ ಹೆಗಲು ಕೊಡುತ್ತಿರುವ ಆತ್ಮೀಯ ಗೆಳೆಯ www.varnila.com ನ ಶ್ರೀ ರಾಕೇಶ್ ಬಂಗೇರ.
* ಮುದ್ರಣಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಅಂದವಾಗಿ ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ಅಕ್ಷರ / ಗಣಿತದ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಕೊಡುತ್ತಿರುವ ಶ್ರೀಮತಿ ಪುಷ್ಪ ರಾಕೇಶ್.
* ಸಮಾಜಮುಖೀ ಯೋಜನೆಗಳಿಗೆ ಸದಾ ಸ್ಫೂರ್ತಿಯಗಿರುವ ಚಿಕ್ಕಪ್ಪ ಶ್ರೀ ಪ್ರಾ. ಉಪೇಂದ್ರ ಸೋಮಯಾಜಿ.
* ಶ್ರದ್ಧೆಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಹೆಸರಾಗಿದ್ದ, ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಯೋಜನೆಗಳಿಗೆ ಪ್ರೇರಣಾಶಕ್ತಿಯಾಗಿರುವ ತೀರ್ಥರೂಪ ಶ್ರೀ ದಿ. ಚತುಶ್ಶಾಸ್ತ್ರ ವಿದ್ವಾನ್ ಕೋಟ ವಾಸುದೇವ ಸೋಮಯಾಜಿ.

ವಿ.ಸೂ.:– ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕನ್ನಡಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಓದುತ್ತಿರುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಅತೀ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ, ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಉಚಿತವಾಗಿ ವಿತರಿಸುವ ಉದ್ದೇಶವನ್ನು ನಾವು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಂತಹ ಶಾಲೆಯ ಅಧ್ಯಾಪಕರು, ಹಾಗೂ ಉಚಿತ ಹಂಚಿಕೆಗೆ ಪ್ರಾಯೋಜಕತ್ವ ವಹಿಸಲು ಆಸಕ್ತಿ ಇರುವವರೂ ಕೂಡ freeganita@gmail.com / 98808 31316, 98452 34245 ನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು.

www.FREEganita.com ಸವೆದು ಬಂದ ದಾರಿ

2006	www.freeganita.com/eng/content.html	ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ಸಿ.ಬಿ.ಎಸ್.ಇ, ಕರ್ನಾಟಕ, ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ, ತಮಿಳ್ನಾಡು, ಕೇರಳ ಮತ್ತು ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶ ರಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ಪಠ್ಯಕ್ರಮಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಾಠಗಳ ಅಳವಡಿಕೆ.
2007	www.freeganita.com/kan/content.html	ಕೋಟ ವಿವೇಕ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ಅಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿದ್ದ ಶ್ರೀ ವಿಶ್ವೇಶ್ವರ ಹಂದೆಯವರಿಂದ ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ನಿಂದ ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ ಅನುವಾದ.
2010-11		ಕೋಟ ವಿವೇಕ ವಿದ್ಯಾಸಂಸ್ಥೆಗಳ ಸಹಕಾರದೊಂದಿಗೆ ಅಲ್ಲಿನ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಂದ (ಶ್ರೀ ವಿಶ್ವೇಶ್ವರ ಹಂದೆ, ಶ್ರೀ ರಾಧಾಕೃಷ್ಣ ಭಟ್) ಮತ್ತು ಸಾಹಿತಿ ಶ್ರೀ ಉಪೇಂದ್ರ ಸೋಮಯಾಜಿಯವರಿಂದ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಪಾಠಗಳ ಚಿತ್ರೀಕರಣ. ಕರ್ನಾಟಕ್ ಬ್ಯಾಂಕ್ ಅಧ್ಯಕ್ಷರಾಗಿದ್ದ ಶ್ರೀ ಅನಂತಕೃಷ್ಣ ರವರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬ್ಯಾಂಕ್ ಪ್ರಾಯೋಜಿಸಿದ ಚಿತ್ರೀಕೃತ ಪಾಠಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ, ತರಗತಿಗೆ ಒಂದರಂತೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಗಣಿತ 8, 9, 10 ಹೆಸರಿನ ಮೂರು ಡಿವಿಡಿಗಳ ಬಿಡುಗಡೆ.
2017-19		ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ಸಿ.ಬಿ.ಎಸ್.ಸಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಯಾದಂತೆ ತರಗತಿ 8, 9 ಮತ್ತು 10ರ ಗಣಿತಪಾಠಗಳ ಮಾರ್ಪಾಡು.

www.FREEganita.com ಸವೆದು ಬಂದ ದಾರಿ

2019-20	www.freeganita.com/abhyasa/content.html 	ಕೋಟ ವಿವೇಕ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ಅಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿರುವ ಶ್ರೀ ರಾಧಾಕೃಷ್ಣ ಭಟ್ ಮತ್ತು ಶ್ರೀಮತಿ ನಾಗಲಕ್ಷ್ಮಿ ಉಪಾಧ್ಯರಿಂದ ಬದಲಾದ/ಹೊಸ ಪಾಠಗಳ ರೆಕಾರ್ಡಿಂಗ್. ತರಗತಿ 8, 9 ಮತ್ತು 10ರ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪಾಠಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು (1500ಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು) ಬಿಡಿಸಿದ್ದನ್ನು ಅಂತರ್ಜಾಲದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸುವಿಕೆ. ಕರ್ನಾಟಕ್ ಬ್ಯಾಂಕ್ ಅಧ್ಯಕ್ಷರಾಗಿದ್ದ ಶ್ರೀ ಜಯರಾಮ ಭಟ್ ಮತ್ತು ಮುಖ್ಯ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಣಾ ಅಧಿಕಾರಿಯಾಗಿದ್ದ ಶ್ರೀ ಮಹಾಬಲೇಶ್ವರ ಭಟ್ ರವರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬ್ಯಾಂಕ್ ಪ್ರಾಯೋಜಿಸಿದ ಪಾಠಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದೇ ಡಿವಿಡಿಯ ಬಿಡುಗಡೆ (ಮೂರು ಡಿವಿಡಿಗಳ ಬದಲು).
2020-21	www.freeganita.com/ganita8910/MIS_COMP/index.html	ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿನ ಗಣಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗುವಂತೆ ಹಲವು ಪಾಠಗಳ ಅಳವಡಿಕೆ.
2021	www.freeganita.com/ganita8910/index.html	ಹಿಂದಿನ ಮೂರು ಡಿವಿಡಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಗಾತ್ರ ಜಾಸ್ತಿ ಆಗಿದ್ದುದರಿಂದ ಪಾಠಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಜಾಲದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿ ಅಳವಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿರಲಿಲ್ಲ. ಒಂದೇ ಡಿವಿಡಿಯಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದ್ದನ್ನು ಅಂತರ್ಜಾಲದಿಂದ ಉಚಿತವಾಗಿ ಡೌನ್ಲೋಡ್ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದಂತೆ ಬದಲಾವಣೆ.
2023 	www.freeganita.com/ganithasutra.pdf	ಶಾಲಾವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳುವ ಉದ್ಯೋಗಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಒಂದೆಡೆ ಸಿಗುವಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರಗಳಿರುವ 'ಈ' ಪುಸ್ತಕ (ಕನ್ನಡ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ).

ಗಣಿತ ಎಂದರೆ ಮಾರು ದೂರ ಹಾರುವುದು ಏಕೆ?

ನಮಗೆಲ್ಲ ತಿಳಿದಿರುವ ಹಾಗೆ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಭಾರತೀಯರ ಕೊಡುಗೆ ಅಪಾರ. ಅದರಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಹಿಡಿದು ಅನಂತದವರೆಗೆ. ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದವರೂ ಭಾರತೀಯರೇ. ಅಳಿದುಹೋದ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರಲ್ಲಿ ಮಹತ್ತರ ಕೊಡುಗೆ ನೀಡಿದವರು ಬಹುಧಾಯನ, ಪಾಣಿನಿ, ಕಾತ್ಯಾಯನ, ಯಾಜ್ಞವಲ್ಕ್ಯ, ಶ್ರೀಧರ, ವರಾಹಮಿಹಿರ, ಹೇಮಚಂದ್ರ, ಜಯದೇವ, ಪಿಂಗಳ, ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ, ಆರ್ಯಭಟ, ಭಾಸ್ಕರ II. ಇವರೆಲ್ಲರ ಹೊರತಾಗಿ ನಮ್ಮ ಬಿಜಾಪುರದವರೇ ಆದ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ, ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ರಾಮಾನುಜನ್. ಹೀಗೆ ಇನ್ನೂ ಹಲವರು.

ಇಂತಹ ಗಣಿತದ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಎಂದರೆ ಗುಮ್ಮ ಎಂದು ಹೆದರುವ ಮಕ್ಕಳು ಜಾಸ್ತಿ ಏಕೆ? ಹೆದರಿಸುವ ಪಾಲಕರು, ಸಂಬಂಧಿಗಳು, ಶಿಕ್ಷಕರು, ಓರಗೆಯವರು ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಎನ್ನಬಹುದೇ?

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಉನ್ನತಪದವಿ ಗಳಿಸಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಅದರ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪ ಪರಿಣತಿ ಇರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸುವಲ್ಲಿ ತರ್ಕ ಮುಖ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಜೀವನದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ಎದುರಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ತಾರ್ಕಿಕ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ ಸಹಾಯಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಕಲಿಕೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾ ಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರಿಂದಲೇ ತತ್ವಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನವರು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಣತರು ಆಗಿ ಗುರುತಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದು.

ತರಗತಿ 8, 9, 10 ರಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುವ ಗಣಿತವು ಮುಂದಿನ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಬದುಕಲು ಒಂದು ಭದ್ರ ಅಡಿಪಾಯವನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದು ತಿಳಿದ ವಿಷಯವೇ.

ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತಿರುವ ಅದರಲ್ಲೂ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ವಿವಿಧ ಸವಲತ್ತುಗಳಿಂದ ವಂಚಿತರಾದ ಸರಕಾರೀ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತಿರುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಲೆಂದು ಈಗಿನ ಅಂತರ್ಜಾಲಯುಗದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿರುವುದೇ www.FREEganita.com ಅದು ಹಾದುಬಂದ ದಾರಿಯನ್ನು ಈ ಹಿಂದಿನ ಪುಟಗಳಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. **ಪುಸ್ತಕ ವಿಸ್ತಾರವಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವ ಭಯದಿಂದ ಗಣಿತದ ಭದ್ರಬುನಾದಿಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿಲ್ಲ. ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ತರಗತಿ 10 ರ ಮಟ್ಟದ ಗಣಿತದ ವಿಷಯಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ ಅಂತಹ ಉದ್ಯೋಗಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಈ ಪುಸ್ತಕ ಸಹಾಯಕ್ಕೆ ಬರಲಿದೆ.**

ಪರಿವಿಡಿ

ವಿ.ಸೂ. ತರಗತಿ 8,9 ಮತ್ತು 10 ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು 1 ರಿಂದ 4 ರ ವರೆಗಿನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಕ್ಲಿಕ್ಕಿಸಿ :

www.freeganita.com/ganita8910/index.html

www.freeganita.com/ganita8910/MIS_COMP/index.html

1. ಅಂಕಗಣಿತ/Arithmatic

1.0 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಚಯ / Introduction to Numbers :

Type ವಿಧ	Symbol ಸಂಕೇತ	Definition ವ್ಯಾಖ್ಯೆ	Example ಉದಾಹರಣೆ
ಸ್ವಾಭಾವಿಕ Natural	N	ಎಣಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು The numbers that are used for counting.	1, 2, 3,...100...
ಪೂರ್ಣ Whole	W	ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು Zero and Natural numbers	0,1, 2.....1000...
ಪೂರ್ಣಾಂಕ Integers	Z	ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ Whole numbers and their additive inverse	...-2,-1, 0, 1, 2..
ಭಾಗಲಬ್ಧ Rational	Q	ಛೇದ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರದ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅನುಪಾತ (ಭಿನ್ನರಾಶಿ) Number expressed as the ratio of two integers, where the denominator is not 0.	..$-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ -2, -1, 0, 1, 2..
ಅಭಾಗಲಬ್ಧ Irrational	I	$\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕವಲ್ಲದ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. Non terminating and non recurring decimals/ numbers which cannot be written in the form $\frac{p}{q}$	$\sqrt{2}$, π
ಸಮ Even	2k	2 ರ ಗುಣಕಗಳ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು Integers which are multiples of 2	...-4,-2,0,2,4,6...
ಬೆಸ Odd	2k+1	2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು Integers not divisible by 2	... -3,-1 ,1,3,5..
ಅವಿಭಾಜ್ಯ Prime	P	1 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದು ಕೇವಲ 1 ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು Whole number greater than 1, whose factors are 1 and itself	2,3,5,7,11,13..
ವರ್ಗ Square	$n*n=n^2$	ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವಂತಹವು Product of a number multiplied by itself	2^2=4, 3^2=9, 16, 25..

ವಿ.ಸೂ.:
ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆ * ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಗುಣಕಾರ (x) ಚಿಹ್ನೆ ಎಂದು ಓದಿಕೊಳ್ಳಿ

Note:
*** Symbol is used for multiplication throughout the book**

2*3 = 2 x 3

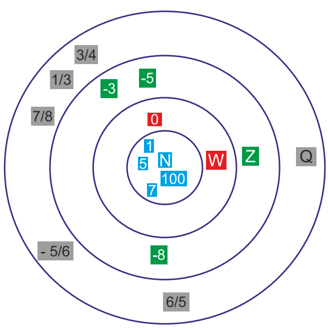
N = {Set of natural numbers},

W = {Set of whole Numbers},

Z = {Set of integers}

Q = {set of rational numbers}

Then N ⊂ W ⊂ Z ⊂ Q



1.1 ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳು / Divisibility Tests

ಭಾಜಕ Divider	ಭಾಜಕ ನಿಯಮ Divider Condition	ಉದಾಹರಣೆ Example
2	ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆ (0/2/4/6/8) ಆಗಿರಬೇಕು. The last digit should be (0/2/4/6/8).	128 Yes $\frac{128}{2} = 64$ 129 No
3	ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. The sum of the digits to be divisible by 3.	381 (3+8+1 = 12, and $\frac{12}{3}$ = 4) Yes $\frac{381}{3} = 127$ 217 (2+1+7=10, and $\frac{10}{3}$ = 3 ⅓) No
4	ಕೊನೆಯ 2 ಅಂಕೆಗಳಿಂದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. The number formed by last 2 digits is divisible by 4.	1312 Yes ($\frac{12}{4}$ = 3) $\frac{1312}{4} = 328$ 7018 ($\frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$) No
5	5 ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆ 0 ಅಥವಾ 5 ಆಗಿರಬೇಕು. The last digit to be 0 or 5.	175 Yes $\frac{175}{5} = 35$ 809 No
6	ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. The number is divisible by both 2 and 3.	114 (it is even, and 1 + 1+ 4 = 6 and $\frac{6}{3}$ = 2) Yes $\frac{114}{6} = 19$ 308 (it is even, but 3 + 0 + 8 = 11 and $\frac{11}{3}$ = 3 ⅔) No
7	ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆಯಿಲ್ಲದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರಬೇಕು ಅಥವಾ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಸತತವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. The Number got by subtracting double of the last digit of the number from the given number without its last digit should be 0 or divisible by 7. This rule can be applied successively.	672 (Double of 2 is 4, 67- 4 = 63, and $\frac{63}{7}$ = 9) Yes $\frac{672}{7} = 96$ 905 (Double of 5 is 10, 90-10 = 80, and $\frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}$) No

ಭಾಜಕ Divider	ಭಾಜಕ ನಿಯಮ Divider Condition	ಉದಾಹರಣೆ Example
8	ಕೊನೆಯ 3 ಅಂಕೆಗಳಿಂದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. The number formed by last 3 digits is divisible by 8.	109816 ($\frac{816}{8}$ = 102) Yes $\frac{109816}{8}$ = 13727 216302 ($\frac{302}{8}$ = 37 ¾) No
9	ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು (ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬಹುದು). The sum of the digits is divisible by 9 (This rule can be applied repetitively).	1629 (1 + 6 + 2 + 9 = 18, and again, 1 + 8 = 9) Yes 2013 (2 + 0 + 1 + 3 = 6) No
10	ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆ 0 ಆಗಿರಬೇಕು. The number ends in 0.	220 Yes $\frac{220}{10}$ = 22 221 No
11	(ಸಮಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ – ಬೆಸಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ) = 0 ಆಗಿರಬೇಕು ಅಥವಾ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. (Sum of digits in even places - sum of digits in odd places) = 0, or divisible by 11.	1364 {(3 + 4) - (1 + 6) = 0} Yes $\frac{1364}{11}$ = 124 3729 {(7 + 9) - (3 + 2) = 11} Yes $\frac{3729}{11}$ = 339 25177 {(5 + 7) - (2 + 1 + 7) = 4} No
12	ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ಮತ್ತು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. The number is divisible by both 3 and 4.	648 (By 3? 6 + 4 + 8 = 18 and $\frac{18}{3}$ = 6 Yes By 4? $\frac{48}{4}$ = 12 Yes) Yes $\frac{648}{12}$ = 54 524 (By 3? 5 + 2 + 4 = 11, $\frac{11}{3}$ = 3 $\frac{2}{3}$ No No need to check by 4.) No

1.2. ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. / HCF and LCM

Factors (ಅಪವರ್ತನಗಳು) of 16: (1, 16), (2,8), (4,4)

Factors of 24: (1, 24), (2,12), (3,8), (4,6)

Factors of 20: (1, 20), (2,10), (4,5)

ಉದಾ Example	ಮ.ಸಾ. ಅಪವರ್ತನ HCF	ಲ.ಸಾ. ಅಪವರ್ತ್ಯ LCM
1	2 | 16,24,20 2 | 8,12,10 | 4,6,5 HCF = 2*2 = 4 ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಅತೀ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆ Highest among all Common Factors	2 | 16,24,20 2 | 8,12,10 2 | 4,6,5 | 2,3,5 LCM = 2*2*2*2*3*5 = 240 ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಅತೀ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆ Least among all Common Multiples
	5 | 15,20,10 | 3, 4, 2 HCF = 5 = 5	5 | 15,20,10 2 | 3, 4, 2 | 3, 2, 1 LCM = 5*2*3*2*1 = 60
ಉಪಯೋಗ Uses	ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸುಲಭೀಕರಿಸಲು ಸಹಾಯಕ Of help in simplifying fractions	ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು/ಕಳೆಯಲು ಸಹಾಯಕ To of help in adding/ subtracting fractions

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ * ಲ.ಸಾ.ಅ. = ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ.

HCF * LCM of any 2 Numbers = Product of Those 2 Numbers.

1.3 ಘಾತ / Powers

$2^3*2^2 = 2^{3+2} = 2^5$; $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$; $(2^3)^4 = 2^{3x4} = 2^{12}$; $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1^2}{2^2} = 2^{-2}$

In general the rules are :

No.	Formula
1	$a^n = a*a*a*a \rightarrow$ n times
2	$a^1 = a \quad a^0 = 1$
3	$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$
4	$(a^m) * (a^n) = a^{m+n}$
5	$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$
6	$(a^m)^n = a^{mn}$
7	$(a*b)^m = (a^m) * (b^m)$
8	$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$
9	$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$
10	$\sqrt[m]{xy} = x^{\frac{1}{m}} * y^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x} * \sqrt[m]{y}$
11	$\sqrt[m]{\frac{x}{y}} = \sqrt[m]{x} \div \sqrt[m]{y}$

1.3.1 ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವಾಗ ಉದ್ಭವಿಸುವ ಸಂದೇಹಗಳನ್ನು ನಿವಾರಿಸಲು BODMAS ಎನ್ನುವ ನಿಯಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾದ ಹಂತಗಳು:

To eliminate doubts during simplification, BODMAS rule is applied and steps to be followed are:

B	ಆವರಣ Brackets first
O	ಘಾತ, ವರ್ಗ ಮೂಲ.. Orders (i.e. Powers and Square Roots/Exponents..)
DM	ಗುಣಕಾರ, ಭಾಗಕಾರ (ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ) Division and Multiplication (left-to-right)
AS	ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ (ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ) Addition and Subtraction (left-to-right)

1.4 ಶ್ರೇಡಿ ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿ / Sequence and Series

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿ ಯು ನಿಯಮಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವು ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳನ್ನು T_1 T_2 T_3 T_4 T_n ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

A sequence is an ordered arrangement of numbers according to a rule.
The individual numbers in the sequence are called terms of the sequence.
The terms of a sequence are generally denoted by T_1 T_2 T_3 T_4 T_n…. as shown below.

Order number of the term ⟶	1st	2nd	3rd	4th	----	nth	---
Corresponding notation ⟶	T_1	T_2	T_3	T_4	----	T_n	---

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಶ್ರೇಡಿಯಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಆ ಶ್ರೇಢಿಯ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು S ಅಥವಾ Sn ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

The sum of terms of a finite sequence is called the series of the corresponding sequence and is usually denoted by S or Sn.

	ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ **Arithmetic Progression**	**ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ** **Geometric Progression**
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ Definition	ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ A sequence in which the difference between 2 consecutive terms is constant	ಶ್ರೇಢಿಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪದ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದದ ಅನುಪಾತ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ A sequence in which the ratio between 2 consecutive terms is constant
ಉದಾಹರಣೆ Example	{1,3,5,7,9.....}	{2, 4, 8,16 …….}
ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ General Expression	$\{a, a+d, a+2d \ldots a+(n-1)d\}$	$\{a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{(n-1)}\}$
ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ General Term	$T_n = T_{n-1}+d = a+(n-1)d$	$T_n = T_{n-1}*r = ar^{(n-1)}$
ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ / ಅನುಪಾತ Common Difference / Ratio	$d = T_{n+1} - T_n$	$r = \frac{T_{(n+1)}}{T_n}$
n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S_n Sum of n terms	$S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} = \frac{n}{2}\{a+T_n\}$	$S_n = a\frac{(1-r^n)}{(1-r)}$

1.5 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳು/Permutations and Combinations

Note: n! = 1*2*3….*n = n*(n-1)!

	ಕ್ರಮಯೋಜನೆ Permutation	ವಿಕಲ್ಪ Combination
ಅರ್ಥ Meaning	ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ಜೋಡಣೆ Arrangement of things in an orderly manner	ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳ ಆಯ್ಕೆ Selection of different objects
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ Definition	'n' ವಸ್ತುಗಳಿಂದ 'r' ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಜೋಡಿಸುವ ವಿಧ No of ways of arranging 'n' things taken 'r' things at a time	'n' ವಸ್ತುಗಳಿಂದ 'r' ವಸ್ತುಗಳ ಆಯ್ಕೆ No of combinations of 'n' things taken 'r' things at a time
ಉದಾಹರಣೆ Example	2,3,4,5 ಮತ್ತು 6 ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು 3 ಅಂಕಿಯ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು How many 3 digit numbers can be formed using the digits2,3,4,5and 6 without repetitions	20 ಜನ ಹಾಕಿ ಆಟಗಾರರಲ್ಲಿ 10 ಜನರ ತಂಡವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು? How many 10 member hockey team be formed from a list of 20 player
ಸೂತ್ರ Formula	${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$	${}_nP_r = r!*{}_nC_r$

1.6 ನಿಜ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ / Maths in Daily Life

- **1.6.1** 100ಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಎನ್ನುವುದೇ ಶೇಕಡ
  Percentage is a number expressed as a ratio with reference to 100.

- **1.6.2** ಲಾಭ (ಹೆಚ್ಚಳ)% = $\left(\frac{\text{ಮೂಲಬೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚಳ}}{\text{ಮೂಲಬೆಲೆ}}\right)*100$

  Profit (Increase) % $=\left(\frac{\text{Increase in Value}}{\text{Original Value}}\right)*100$

- **1.6.3** ಲಾಭ/ನಷ್ಟ Profit/Loss

No	CP: Cost Price/ ಅಸಲು ಅಥವಾ ತಯಾರಿಸಿದ ಬೆಲೆ SP: Selling Price/ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ MP: Marked Price/ ನಮೂದಿಸಿದ ಬೆಲೆ **Formulae : ↓ ↓ ↓**
1	Profit OR Loss = ± (CP-SP) (- indicates loss) {ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟ}
2	Profit OR Loss % = $\frac{\text{Profit * 100}}{\text{CP}}$ OR $\frac{\text{Loss * 100}}{\text{CP}}$ {ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟ}

3	$CP = \frac{100 * SP}{(100 + Profit\%)}$ OR $\frac{100 * SP}{(100 - Loss\%)}$	
4	$SP = \frac{(100 + Profit\%) * CP}{100}$ OR $\frac{(100 - Loss\%) * CP}{100}$	
5	Discount (ಸೋಡಿ) % = $\frac{Discount * 100}{MP}$	
6	$SP = \frac{(100 - Discount\%) * MP}{100}$	

- **1.6.4 ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ / Interest calculation :**

  P = Principal Amount (ಅಸಲು), T = Term (ಅವಧಿ), R = Rate of interest (ಬಡ್ಡಿಯ ದರ)

  Simple Interest(SI) (ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ) = $\frac{P * T * R}{100}$

  Compound Interest (CI) (ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ) = $P\{(1+ \frac{R}{100})^T - 1\}$

- **1.6.5. ಕೆಲಸಗಾರರು, ಸಮಯ, ಕೆಲಸ / Workers, Time and Work :**

  Formula : $\frac{N_1 * D_1 * R_1 * E_1}{W_1} = \frac{N_2 * D_2 * R_2 * E_2}{W_2}$

  N_1, N_2 = No of workers; ಕೆಲಸಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ

  D_1, D_2 = Time taken to do work (days, hours..) ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ

  R_1, R_2 = Rate of worker OR Rate of Machine,
  ಕೆಲಸಗಾರನ ಮಜೂರಿ / ಯಂತ್ರದ ಬೆಲೆ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)

  E_1, E_2 = Efficiency of worker OR Efficiency of Machine
  ಕೆಲಸಗಾರನ/ಯಂತ್ರದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ/ಶಕ್ತಿ
  ($E_1 = E_2 = 1$ when not specified)

  W_1, W_2 = Amount of work done or quantum of resources available / ಮಾಡಿದ ಕೆಲಸ

- **1.6.6. ಇತರ ಸೂತ್ರಗಳು / Other useful formulae :**

  1.6.6.1. ವೇಗ = $\frac{\text{ಚಲಿಸಿದ ದೂರ}}{\text{ತಗಲಿದ ಸಮಯ}}$ Speed = $\frac{\text{Distance Travelled}}{\text{Time Taken}}$

  1.6.6.2. ಸರಾಸರಿ = $\frac{\text{ಎಲ್ಲ ಮಾಪನಗಳ ಮೊತ್ತ}}{\text{ಮಾಪನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$ Average = $\frac{\text{Sum of all readings}}{\text{Number of readings}}$

  1.6.6.3. ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ = P(E) = $\frac{\text{ಘಟನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$

  Probability of an event - P(E) = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{Number of events}}{\text{Total number if possibilities}}$

1.6.6.4. A ಯು ಒಂದು ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು 'm' ಸಮಯಮಾನಗಳನ್ನು ಮತ್ತು B ಯು ಅದೇ ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು 'n' ಸಮಯಮಾನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

ಇಬ್ಬರೂ ಸೇರಿ ಅದೇ ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $\frac{mn}{m+n}$ ಸಮಯ ಮಾನಗಳು.

ಕೊಳವೆಗಳಿಂದ ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು ತುಂಬಿಸಲು/ಖಾಲಿಮಾಡಲು ತಗಲುವ ಸಮಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಇದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

If A finishes a job in 'm' units of time and if B finishes the same job in 'n' units of time, then both of them together can finish same job in units of time.

$\frac{mn}{m+n}$ Same formula applies for calculating time for filling/emptying of tanks using pipes.

1. 6.6.5. ಅನುಪಾತ	Ratio
ಎರಡು ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ a:b ಅಂದರೆ ಒಟ್ಟು a+b ಭಾಗದಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಭಾಗಗಳು ಎಂದು ಅರ್ಥ	The relationship between two values. a:b means a parts and b parts out of total of a+b parts
2:3 is same as 4: 6, 6:9 and means 2x and 3x out of 5x. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2x}{3x}$	

1.6.6.6. ಸಮಾನಾನುಪಾತ Proportion a:b :: c:d === $\longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

1.6.6.7. ಪಾಲುಗಾರಿಕೆ Partnership :

ಪಾಲುದಾರರಲ್ಲಿ ಲಾಭಾಂಶ ಹಂಚಬೇಕಾದರೆ ಅವರುಗಳು ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣ ಮತ್ತು ತೊಡಗಿಸಿದ ಅವಧಿಯನ್ನೂ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

A ಯು a ಹಣವನ್ನು m ಅವಧಿಗೆ ತೊಡಗಿಸಿದ್ದು B ಯು b ಹಣವನ್ನು n ಅವಧಿಗೆ ತೊಡಗಿಸಿದ್ದರೆ ಲಾಭಾಂಶವನ್ನು am:bn ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಹಂಚಬೇಕು.

In partnership, for profit sharing, product of amount invested and time invested should be taken in to consideration.

If A invests a amount for m period and B invests b amount for n period then profit should be shared in the ratio of am:bn

◆◆◆◆◆◆

2. ಬೀಜಗಣಿತ / Algebra

2.1 Formulae :

1	$(a+b)(c+d)$	$ac+ad+bc+bd$
2	$(x+a)*(x+b)$	$x^2+x(a+b)+ab$
3	$(x+a)(x+b)(x+c)$	$x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$
4	$(a+b)^2$	a^2+b^2+2ab
5	$(a-b)^2$	a^2+b^2-2ab
6	$(a+b)(a-b)$	a^2-b^2
7	$(a+b+c)^2$	$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
8	$(a+b)^3$	$a^3+b^3+3ab(a+b)$
9	$(a-b)^3$	$a^3-b^3-3ab(a-b)$
10	$(a+b)(a^2+b^2-ab)$	a^3+b^3
11	$(a-b)(a^2+b^2+ab)$	a^3-b^3
12	$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$	$a^3+b^3+c^3-3abc$

2.2 Find HCF (ಮ.ಸಾ.ಅ) and LCM (ಲ.ಸಾ.ಅ)

Ex: $6x^2y^3$, $8x^3y^2$, $12x^4y^3$, $10x^3y^4$

HCF

$2x$	$6x^2y^3$,	$8x^3y^2$,	$12x^4y^3$,	$10x^3y^4$
x	$3xy^3$,	$4x^2y^2$,	$6x^3y^3$,	$5x^2y^4$
y	$3y^3$,	$4xy^2$,	$6x^2y^3$,	$5xy^4$
y	$3y^2$,	$4xy$,	$6x^2y^2$,	$5xy^3$
	$3y$,	$4x$,	$6x^2y$,	$5xy^2$

HCF = $2x*x*y*y = 2x^2y^2$

LCM

$2x$	$6x^2y^3$,	$8x^3y^2$,	$12x^4y^3$,	$10x^3y^4$
x	$3xy^3$,	$4x^2y^2$,	$6x^3y^3$,	$5x^2y^4$
y	$3y^3$,	$4xy^2$,	$6x^2y^3$,	$5xy^4$
y	$3y^2$,	$4xy$,	$6x^2y^2$,	$5xy^3$
y	$3y$,	$4x$,	$6x^2y$,	$5xy^2$
x	3,	$4x$	$6x^2$,	$5xy$
2	3,	4	$6x$	$5y$
3	3,	2	$3x$	$5y$
	1,	2	x	$5y$

LCM = $(2x*x*y*y) * (y*x*2*3*2*x*5y)$
$= 2x^2y^2 * 60x^2y^2 = 120x^4y^4$

2.3. ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ: Reminder Theorem

ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ * ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ

Dividend= Divisor * Quotient + Reminder

$f(x) = g(x) * q(x) + r(x)$

$f(x) = x^3+4x^2-6x+2 = (x-3)(x^2+7x+15) + 47$

ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ: ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ f(x) ಯನ್ನು (x+a) ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ f(-a) ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

Reminder Theorem: If a Polynomial f(x), is divided by (x+a) then the remainder is f(-a).

ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ: f(-a) = 0 ಆಗಿದ್ದರೆ (x+a)ಯು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ f(x)ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

Factor Theorem: If f(-a)=0 then (x+a) is a factor of polynomial f(x)

2.4. ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ / Quadratic Equation

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ $ax^2 + bx + c = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಇದರ ಮೂಲಗಳು

The general format of Quadratic equation is $ax^2 + bx + c = 0$ and its roots are:

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \& \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

m ಮತ್ತು n ಗಳು ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ ಆಗ

If m and n are roots of a quadratic equation then

$x^2 - (m+n)x + mn = 0$ ಆಗ

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ sum of the roots $(m+n) = -\frac{b}{a}$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ product of roots$(mn) = \frac{c}{a}$

2.5 ಗಣಗಳು / Sets

ವಿಶಿಷ್ಟ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ, ಗುಂಪಾಗಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಗಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಆ ಗಣದ ಗಣಾಂಕಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

A set is a collection of well defined objects. The objects which are members of the set are called elements.

ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಗಣವನ್ನು ಸಂಯೋಗ ಗಣ ($\cup$)ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

The union ($\cup$) of two sets is the set of elements from both the sets.

ಎರಡೂ ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಕಗಳಿಂದಾದ ದೊರಕುವ ಗಣವನ್ನು ಛೇದನ ಗಣ ($\cap$) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

The intersection ($\cap$) of two sets is defined as a set of all those elements which are present in both the sets.

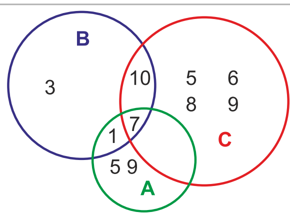
A ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು n(A) ಯಿಂದ ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ.

The number of elements in a set is denoted by n(A).

$(A\cup B) \cup C = (\{1,3,5,7,9,10\}) \cup \{5,6,7,8,9,10\}$
$= \{1,3,5,6,7,8,9,10\}$

$(A\cap B) \cap C = (\{1,7\} \cap \{5,6,7,8,9,10\} = \{7\}$

$n(A) = 4, n(B)=4, n(C)=6$



$B \cup C = C \cup B$	$(A\cup B)^1 = A^1 \cup B^1$
$B \cap C = C \cap B$	$(A\cap B)^1 = A^1 \cap B^1$
$A \cup (B\cup C) = (A \cup B) \cup C$	$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$
$A \cap (B\cap C) = (A \cap B) \cap C$	$n(A\cap B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$
$A \cup (B\cap C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$	
$A \cap (B\cup C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$	

3.0 ರೇಖಾಗಣಿತ / Geometry

3.1 ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳ ರೇಖೆ / Parallel Lines

ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ

1) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
2) ಛೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

If a transversal line cuts two parallel lines then.

1) Each pair of alternate angles is equal.
2) The interior angles on the same side of the transversal are supplementary.

3.1.1.

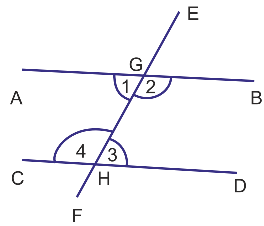
$\angle AGH = \angle GHD$,
$\angle BGH = \angle CHG$
$(\angle 1 = \angle 3, \ \angle 2 = \angle 4)$

3.1.2.

$\angle AGH + \angle GHC = 180^0$,
$\angle BGH + \angle GHD = 180^0$,
$(\angle 1 + \angle 4 = \angle 180^0, \ \angle 2 + \angle 3 = 180^0)$

Also Note

$\angle AGE = \angle BGH, \ \angle EGB = \angle AGH$
$\angle CHG = \angle DHF, \ \angle GHD = \angle CHF$



ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ:

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ,

3) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ

ಅಥವಾ

4) ಛೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿನ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,
ಆ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

If a transversal line cuts two straight lines such that

3) Each pair of alternate angles is equal

OR

4) The interior angles on the same side of the transversal are supplement
Then the straight lines are parallel.

3.2 ತ್ರಿಕೋನ / Triangles

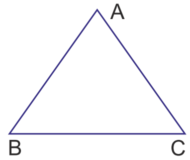
3.2.1. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0. ಆಗಿದೆ.

In any triangle sum of the three angles is 180^0.

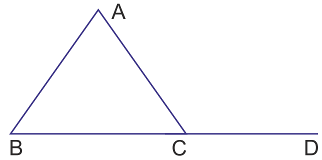
3.2.2. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಬಹಿರ್ಕೋನವು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

If one of the sides of a triangle is extended, the exterior angle so formed is equal to sum of interior opposite angles.

3.2.1.
$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^0$



3.2.2.
$\angle ABC + \angle BAC = \angle ACD$



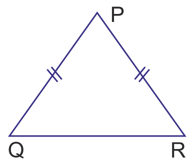
3.2.3. ಪಾದ – ಕೋನ ಪ್ರಮೇಯ: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

Base Angle Theorem: The angles opposite to equal sides of a triangle are equal.

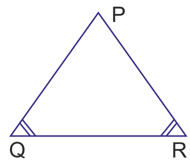
3.2.4. ಪಾದಕೋನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ: ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

Converse of Base Angle Theorem: The sides opposite to equal angles of a triangle are equal.

3.2.3.
If PQ=PR then $\angle PRQ = \angle PQR$



3.2.4.
If $\angle PQR = \angle PRQ$ then PQ = PR



3.3 ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ / Congruency of Triangles

ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. (ಬಾಹು, ಕೋನ, ಬಾಹು) ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ: ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವರೆಡು ಸರ್ವಸಮ.

SAS (Side, Angle, and Side) Postulate: Two triangles are congruent if two sides and included angle of one triangle are equal to the corresponding sides and included angle of the other triangle.

ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. (ಬಾಹು, ಬಾಹು, ಬಾಹು) ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮ.

SSS (Side, Side, Side) Postulate: Two triangles are congruent if the sides of one triangle are equal to the corresponding sides of another triangle.

ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. (ಕೋನ, ಬಾಹು, ಕೋನ) ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ 2 ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅನುರೂಪಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ASA (Angle, Side, Angle) Postulate: Two triangles are congruent if two angles and common side of one triangle are equal to the corresponding angles and common side of another triangle.

ಲಂಬ, ವಿಕರ್ಣ, ಬಾಹು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ: ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು, ಮತ್ತೊಂದರ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪವಾದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

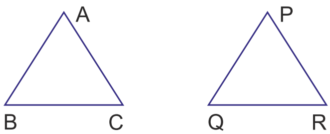
RHS (Right Angle, Hypotenuse, Side) Postulate: Two right angled triangles are congruent if the hypotenuse and a side of one triangle are equal to the hypotenuse and the corresponding side of the other triangle.

SAS: $AB=PQ$ & $\angle BAC = \angle QPR$ & $AC=PR$

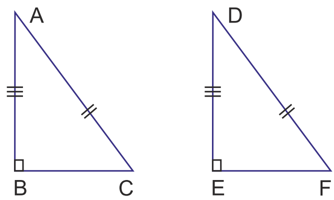
SSS: $AB=PQ$ & $BC=QR$ & $AC=PR$

ASA: $\angle BAC = \angle QPR$ & $AB=PQ$

& $\angle ABC = \angle PQR$



RHS: $AB = DE$ & $AC = DF$



3.4 ತ್ರಿಭುಜದ ಏಕೀಭವನ ರೇಖೆಗಳು / Concurrent Lines of Triangles

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಅವುಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಲಂಬಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನುವರು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು O ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

The point of concurrence of three perpendiculars drawn from the vertices of a triangle to their opposite sides is called Orthocenter and is denoted by O.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನುವರು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು I ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಃಕೇಂದ್ರವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿದ್ದು, ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳನ್ನ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತವು ಅಂತಃವೃತ್ತ.

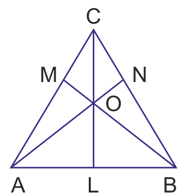
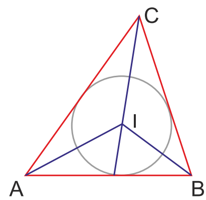
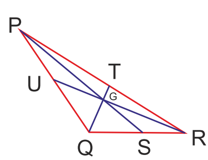
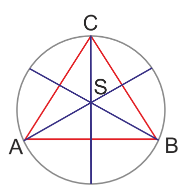
The point of concurrence of three angular bisectors of a triangle is called Incenter and is denoted by I. The circle with Incenter as the center and which touches the three sides of the triangle is called Incircle.

ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಏಕೀಭವಿಸುವ ಬಿಂದುವೇ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ ಇದನ್ನು G ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು ಪ್ರತೀ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯನ್ನು ಶೃಂಗಬಿಂದು ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ 2:1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗೇ ಇರುತ್ತದೆ.

The point of concurrence of the three medians of a triangle is called Centroid and is denoted by G The centroid divides the median in the ratio of 2:1 with respect to the vertex and opposite side and always lies inside triangle.

ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆಗಳು ಏಕೀಭವಿಸುವ ಬಿಂದುವೇ ಪರಿಕೇಂದ್ರ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು S ಅಥವಾ C ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ ಎನ್ನುವರು.

The point of concurrence of three perpendicular bisectors of sides of a triangle is called Sircumcenter and is denoted by S/C. A circle which passes through all the vertices of a triangle is called Circumcircle of the triangle.

O ಲಂಬಕೇಂದ್ರ Orthocenter	
ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳಿಂದ By Altitudes	
I ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ Incenter	
ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳಿಂದ By Angular Bisectors	
G ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ Centroid	
ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಿಂದ By Medians	
S ಪರಿಕೇಂದ್ರ Circumcenter	
ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳಿಂದ By Perpendicular Bisectors	

ಏಕೀಭವನ ರೇಖೆಗಳ ಹೆಸರು **Name of Concurrent Line**	ಏಕೀಭವನ ಬಿಂದುಗಳು **Point of concurrence**	ಬಿಂದುವಿನ ಹೆಸರು **Name of point**
ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳು Altitudes	O	ಲಂಬಕೇಂದ್ರ Orthocenter
ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳು Angular bisector	I	ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ Incenter
ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು Medians	G	ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ Centroid
ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆಗಳು Perpendicular bisectors	S/C	ಪರಿಕೇಂದ್ರ Sircumcenter

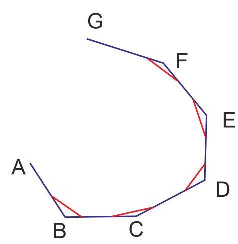
3.5 ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು / Polygons

n ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ (2n-4) ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

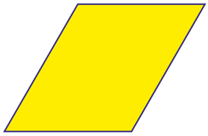
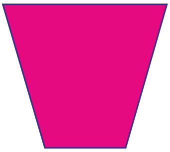
In a polygon of n sides, the sum of the interior angles is equal to (2n-4) right angles.

ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

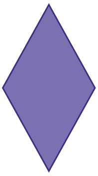
Sum of interior angles in:

ಹೆಸರು **Name**	ಬಾಹುಗಳು **No of sides**	ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ **Sum of angles**	
ತ್ರಿಭುಜ Triangle	3	(2 * 3 - 4) = 2 * 90° = 180°	
ಚತುರ್ಭುಜ Quadrilateral	4	(2 * 4 - 4) = 4 * 90° = 360°	
ಪಂಚಭುಜ Pentagon	5	(2 * 5 - 4) = 6 * 90° = 540°	
ಷಟ್ಭುಜ Hexagon	6	(2 * 6 - 4) = 8 * 90° = 720°	
ಅಷ್ಟಭುಜ Octagon	8	(2 * 8 - 4) = 12 * 90° = 1080°	

3.6. ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು / Polygons

ವಿಧ Type	ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ Parallelogram	ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ Trapezium
ಚಿತ್ರ Figure		
ಲಕ್ಷಣ Basic Property	ಎರಡೂ ಜತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ. Both pairs of opposite sides are parallel.	ಕೇವಲ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ. Only one pair of opposite sides are parallel.
ಬಾಹುಗಳ ಕುರಿತು About Sides	ಎರಡೂ ಜತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಮತ್ತು ಸಮ. Both pairs of opposite sides are parallel AND are equal.	ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ. A pair of opposite sides are parallel.
ಕೋನಗಳ ಕುರಿತು About Angles	1. ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ 2. ಯಾವುದೇ 2 ಅನುಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0. 1. Opposite angles are equal. 2. Sum of any two consecutive angles is 180^0.	1. ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ. 2. ಯಾವುದೇ 2 ಅನುಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0. 1. Opposite angles are equal. 2. Sum of any two consecutive angles is 180^0.
ಕರ್ಣಗಳ ಕುರಿತು About Diagonals	ಕರ್ಣಗಳು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ. Diagonals divide the parallelogram in to two congruent triangles AND bisect each other.	

ವಿಧ Type	ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ **Isosceles Trapezium**	ಆಯತ **Rectangle**
ಚಿತ್ರ Figure		
ಲಕ್ಷಣ Basic Property	ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ & ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ. One pair of opposite sides are parallel AND non parallel sides are equal	ಎರಡೂ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಲಂಬ ಕೋನಗಳು Both pairs of opposite sides are parallel AND all angles are right angle
ಬಾಹುಗಳ ಕುರಿತು About Sides	ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ As stated above	ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ As stated above ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಸಮಾನಾಂತರ. Both pairs of opposite sides are parallel AND equal
ಕೋನಗಳ ಕುರಿತು About Angles	1) ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರ್ಣ. 2) ಸಮಾನಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮ. 1) Pairs of consecutive angles at the end points of the two non parallel sides are supplementary 2) Pairs of consecutive angles at the end points of two parallel sides are equal.	ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಲಂಬ ಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. All angles are equal AND are right angles
ಕರ್ಣಗಳ ಕುರಿತು About Diagonals	ಕರ್ಣಗಳು ಸಮ. Diagonals are equal	ಕರ್ಣಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ. Diagonals are equal AND bisect each other

ವಿಧ Type	ವಜ್ರಾಕೃತಿ Rhombus	ಚೌಕ Square
ಚಿತ್ರ Figure		
ಲಕ್ಷಣ Basic Property	ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ All sides are equal AND both pairs of opposite sides parallel	ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳು All sides are equal AND all angles are right angles
ಬಾಹುಗಳ ಕುರಿತು About Sides	ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ As stated above	ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ. All sides are equal AND opposite sides are parallel
ಕೋನಗಳ ಕುರಿತು About Angles	1) ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ. 2) ಯಾವುದೇ 2 ಅನುಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 1. Oppopsite angles are equal. 2. Sum of any two consecutive angles = 180^0	ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಲಂಬಕೋನಗಳು. All angles are equal AND right angles
ಕರ್ಣಗಳ ಕುರಿತು About Diagonals	ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ Diagonals bisect each other. AND are perpendicular to each other.	ಕರ್ಣಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ. Diagonals are equal, bisect each other AND are perpendicular to each other.

3.7. ಪ್ರಮೇಯಗಳು Theorems

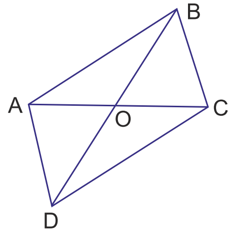
3.7.1. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

The diagonals of a parallelogram bisect each other.

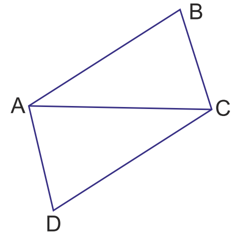
3.7.2. ಕರ್ಣವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

Each diagonal divides a parallelogram in to two congruent triangles.

3.7.1. $AO = OC$ and $BO = OD$



3.7.2. $\triangle ABC \cong \triangle ACD$



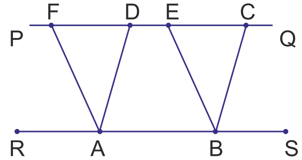
3.7.3. ಒಂದು ಪಾದದ ಮೇಲೆ, ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿರುವುವು.

Parallelograms standing on the same base and between same parallel lines have equal areas.

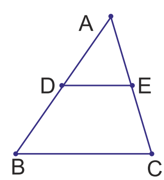
3.7.4. ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯ: ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು ಮತ್ತು ಅದರ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವುದು.

Mid-Point Theorem: The line joining the mid points of any two sides of a triangle is parallel to third side and is equal to half the third side.

3.7.3. Area of ABCD = Area of ABEF



3.7.4. $DE \parallel BC$ and $DE = \frac{1}{2} BC$



3.8. ವೃತ್ತಗಳು Circles

3.8.1. ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

3.8.1. In a circle, the perpendicular from the center to the chord bisects the chord.

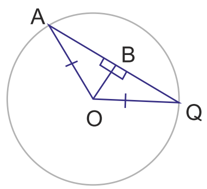
3.8.1. ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

3.8.1. In a circle, the perpendicular from the center to the chord bisects the chord.

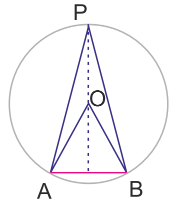
3.8.2. ಅಂತಸ್ಥಕೋನ ಪ್ರಮೇಯ: ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಂಸವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನವು, ಅದೇ ಕಂಸವು ವೃತ್ತದ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

3.8.2. Inscribed Angle Theorem: In any circle, the angle subtended by an arc at the center of the circle is double the angle subtended by the same arc at any point on the remaining part of the circle.

3.8.1. AB = BQ



3.8.2. AOB = 2 ∠ APB



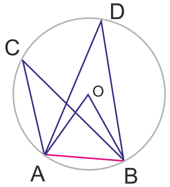
3.8.3. ಒಂದೇ ವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿನ ಅಂತಸ್ಥ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

3.8.3. Inscribed angles in the same segment of a circle are equal.

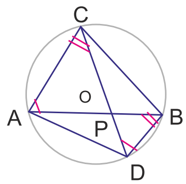
3.8.4. ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ, ಅವುಗಳ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

3.8.4. If two chords of a circle intersect internally or externally then the product of the lengths of their segments are equal.

3.8.3. ∠ ACB = ∠ ADB



3.8.4. PC * PD = PA * PB

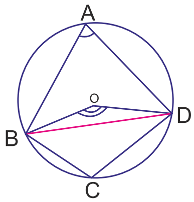
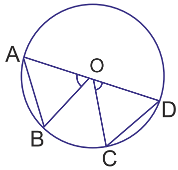


3.8.5. ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0).

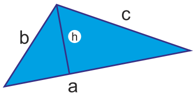
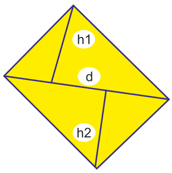
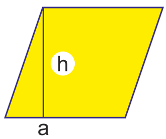
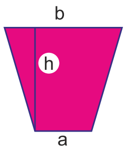
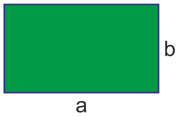
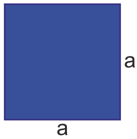
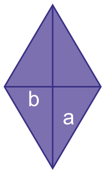
3.8.5. Opposite angles of a cyclic quadrilateral are supplementary (i.e. their sum is 180^0).

3.8.6. ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು(ಕಂಸಗಳು) ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

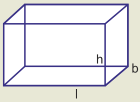
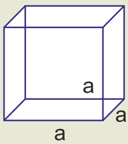
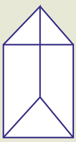
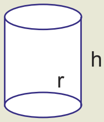
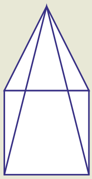
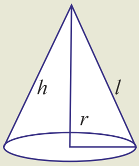
3.8.6. Equal chords of a circle subtend equal angles at the center.

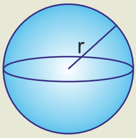
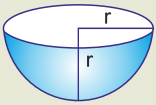
3.8.5. $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ AND $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ 	3.8.6. $\angle AOB = \angle COD$ 

3.9. ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಸೂತ್ರಗಳು / Formulae for Areas

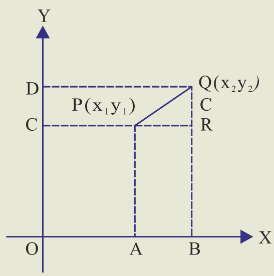
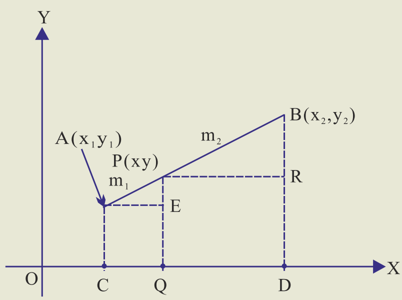
Triangle ತ್ರಿಕೋನ	 	$\frac{1}{2}$ *ah $\frac{1}{2}$ *base * height OR $\sqrt{s(s - a)(s-b)(s-c)}$ Where S = $\frac{1}{2}$ (a+b+c) = $\frac{1}{2}$ (Sum of sides)
Quadrilateral ಚತುರ್ಭುಜ	 	$\frac{1}{2}$ *d * (h1 + h2) $\frac{1}{2}$ *diagnoal *(sum of altitudes on diagonal)
Parallelogram ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ	 	a * h (base * height)
Trapezium ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ	 	$\frac{1}{2}$ * h(a+b) $\frac{1}{2}$ Height*(sum of parallel sides)
Rectangle ಆಯತ	 	a * b Product of sides
Square ವರ್ಗ	 	a * a = a^2 Square of sides
Rhombus ವಜ್ರಾಕೃತಿ	 	$\frac{1}{2}$ * ab $\frac{1}{2}$ * Product of diagonals

3.10. ಘನ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳು / Formulae for solid figures

ಹೆಸರು Name	ಚಿತ್ರ Figure	ಪಾರ್ಶ್ವ/ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ Lateral / Curved Surface Area	ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ Total Surface Area	ಘನಫಲ Volume
ಆಯತ ಘನ Cuboid		2h (l+b)	2 (lh+lb+bh)	lbh
ಘನ Cube		$4a^2$	$6a^2$	a^3
ನೇರ ಪಟ್ಟಕ Right Prism		ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ * ಎತ್ತರ Perimeter of Base * Height	ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + 2(ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) Lateral Surface Area +2 (Area of Base)	ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ*ಎತ್ತರ Area of Base* Height
Right Circular Cylinder		$2\pi rh$	$2\pi r\ (r+h)$	$\pi r^2\ h$
ನೇರ ಗೋಪುರ Right Pyramid		$\frac{1}{2}$ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ * ಓರೆ ಎತ್ತರ $\frac{1}{2}$ Perimeter of Base * Slant Height	ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ+ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ Lateral Surface Area+ Area of Base	$\frac{1}{3}$ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ*ಎತ್ತರ $\frac{1}{3}$ Area of Base*Height
ನೇರ ಶಂಕು Right Circular Cone		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\ \pi r^2 h$

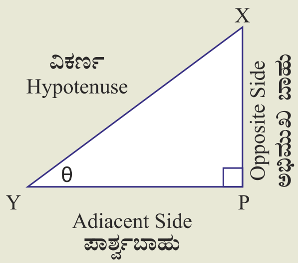
ಹೆಸರು Name	ಚಿತ್ರ Figure	ಪಾರ್ಶ್ವ/ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ Lateral / Curved Surface Area	ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ Total Surface Area	ಘನಫಲ Volume
ಘನ ಗೋಳ Solid Sphere		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
ಘನ ಅರ್ಧಗೋಳ Solid Hemisphere		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$

3.11. ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿ / Co-ordinate Geometry

ದೂರದ ಸೂತ್ರ Distance Formula $PQ = \sqrt{\{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2\}}$	
ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರ Section Formula $P(x,y) = \left\{\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right\}$	

4.0. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು / Trigonometric Ratios

Name	Ratio	In Figure	
sin θ	ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು / ಕರ್ಣ Opposite Side / Hypotenuse	$\frac{PX}{YX}$	
cos θ	ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು / ಕರ್ಣ Adjacent Side / Hypotenuse	$\frac{YP}{YX}$	
tan θ	ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು / ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು Opposite Side / Adjacent Side	$\frac{PX}{PY}$	
cosec θ	ಕರ್ಣ / ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು Hypotenuse / Opposite Side	$\frac{YX}{PX}$	
sec θ	ಕರ್ಣ / ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು Hypotenuse / Adjacent Side	$\frac{YX}{YP}$	
cot θ	ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು / ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು Hypotenuse / Opposite Side	$\frac{PY}{PX}$	



Note :
Cosec, sec, cot ಅನುಪಾತಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ sin, cos and tan ಅನುಪಾತಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವಾಗಿವೆ
Cosec, sec, cot ratios are reciprocals of sin, cos and tan functions respectively.

Useful Formulae :

1. $\sin\theta * \mathrm{cosec}\,\theta = 1$
2. $\cos\theta * \sec\theta = 1$
3. $\tan\theta * \cot\theta = 1$
4. $\sin^2\theta + \cos2\theta = 1$
5. $\sec^2\theta - \tan2\theta = 1$
6. $\mathrm{cosec}^2\theta - \cot2\theta = 1$
7. $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$
8. $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

ವಿಶೇಷ ಕೋನಗಳ ಬೆಲೆ / Values for Special Angles :

Angle / Ratio	0°	30° (∏/6)	45° (∏/4)	60° (∏/3)	90° (∏/2)
Sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Not Defined
Cosec θ	Not Defined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
Sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	Not Defined
Cot θ	Not Difined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ಅನುಪಾತಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ / Relation between various ratios

	sinθ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	cosec θ
sinθ =	sinθ	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\mathrm{cosec}\theta}$
cosθ =	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	cosθ	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\mathrm{cosec}^2\theta-1}}{\mathrm{cosec}\theta}$
tanθ =	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	tanθ	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{cosec}^2\theta-1}}$
cotθ =	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	cotθ	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\mathrm{cosec}^2\theta-1}$
secθ =	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	secθ	$\frac{\mathrm{cosec}\theta}{\sqrt{\mathrm{cosec}^2\theta-1}}$
cosecθ =	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	cosecθ

ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಭಾರತೀಯರ ಕೊಡುಗೆ

ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆ ಸೊನ್ನೆಯೆಂದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದ ವಿಷಯವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಸೊನ್ನೆ ಎಂದರೆ ಏನೂ ಇಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದೇ? ಅಥವಾ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಆಧಾರವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 0 ?. 0 – ಇದನ್ನು ಯಾವಾಗ ಯಾರು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು? ಇದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದವನು ಕ್ರಿ. ಶ 4 ರಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಗಣಿತಜ್ಞ ಆರ್ಯಭಟ ಎನ್ನುವ ತಪ್ಪು ಅಭಿಪ್ರಾಯವಿದೆ. ಇದು ಹೌದೇ? ಬನ್ನಿ ತರ್ಕಿಸೋಣ.

ಕೃಷ್ಣ ಯಜುರ್ವೇದ (4.4.11.12) ದಲ್ಲಿನ ಈ ಶ್ಲೋಕ ಗಮನಿಸಿ:

ಇಮಾ ಮೇ ಅಗ್ನ ಇಷ್ಟಕ ಧೇನವಃ ಸಂತು ಏಕ ಚ ದಶ ಚ ಶತಂ ಚ ಸಹಸ್ರಂ ಚ ಅಯುತಂ ಚ ನಿಯುತಂ ಚ ಪ್ರಯುತಂ ಚ ಅರ್ಬುದಂ ಚ ನ್ಯರ್ಬುದಂ ಚ ಸಮುದ್ರಃ ಚ ಮಧ್ಯಂ ಚ ಅಂತಃ ಚ ಪರಾರ್ಧಃ ಚ ಇಮಾ ಮೇ ಅಗ್ನ ಇಷ್ಟಕ ಧೇನವಃ...

ವಿವರಣೆ: ಏಕ=1, ದಶ=10=10^1, ಶತ=100=10^2, ಸಹಸ್ರ=1000=10^3 ಆಗಿದ್ದು ಹೀಗೆ ಪರಾರ್ಧ=10^{12} ಎಂದು ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಯಜುರ್ವೇದದ ಕಾಲ ಕ್ರಿ. ಪೂ. 12 ನೇ ಶತಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಆಗಲೇ ಸೊನ್ನೆಯ ಕಲ್ಪನೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಆಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಲವೇ? ತದನಂತರ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾದ ಬ್ರಹ್ಮಾಂಡ ಪುರಾಣದಲ್ಲಿನ ಈ ಶ್ಲೋಕ ಗಮನಿಸಿ:

ಏಕಂ ದಶ ಶತಂ ಚೈವ ಸಹಸ್ರಂ ಅಯುತಂ ತಥಾ।
ಲಕ್ಷಂ ಚ ನಿಯುತಂ ಚೈವ ಕೋಟಿಃ ಅರ್ಬುದಂ ಏವಚ ॥

ವಿವರಣೆ: 10ರ ಗುಣಕವು ಈ ರೀತಿಯದಾಗಿದೆ:– ಏಕಂ=1, ದಶ=10^1, ಶತಂ=100=10^2 ಸಹಸ್ರಂ=1000=10^3, ಲಕ್ಷಂ=100000=10^5, ಕೋಟಿಃ=10000000=10^7 ಎಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕರೆಸಿಕೊಳ್ಳಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. 10ರ ಘಾತದ ಈ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಹೆಸರುಗಳು ಈಗಿನ ಎಣಿಕೆಯ ಹೆಸರಿನಂತೆಯೇ ಇದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಮುಂದಿನ ಶ್ಲೋಕ ಗಮನಿಸಿ:

ವೃಂದಃ ಖರ್ವೋ ನಿಖರ್ವಃ ಚ ಶಂಖಪದ್ಮೌ ಚ ಸಾಗರಃ ।
ಅಂತ್ಯಂ ಮಧ್ಯಂ ಪರಾರ್ಧಂ ಚ ದಶವೃದ್ಧ್ಯಾ ಯಥಾ ಉತ್ತರಂ ॥

ವಿವರಣೆ: 10 ರ ಮುಂದಿನ ಘಾತಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡಿ 10^{17} ಕ್ಕೆ ಪರಾರ್ಧ ಎಂದು ಹೆಸರು ನೀಡಿರುವುದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಶ್ಲೋಕದಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 10 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರಕುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನೂ ದಶವೃದ್ಧ್ಯಾ ಯಥಾ ಉತ್ತರಂ ಎನ್ನುವ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದೇ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯ ಸೂತ್ರ ಅಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನು ರಾಮಾಯಣದತ್ತ ತಿರುಗುವಾ. ಯುದ್ಧಕಾಂಡದಲ್ಲಿನ ಕೆಳಗಿನ ಶ್ಲೋಕ (ಸಂಖ್ಯೆ 33) ಗಮನಿಸಿ: ರಾಮ ರಾವಣರ ನಡುವಿನ ಯುದ್ಧದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಾನರರು ಇದ್ದರು ಎಂದು ಇಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಶತಂ ಶತಸಹಸ್ರಾಣಾಂ ಕೋಟಿ ಮಾಹುರ್ಮನೀಷಣಃ ॥ 1 ॥

ವಿವರಣೆ: ಕೋಟಿ ಎಂದರೆ = 100 x 100 x 1000 = 10^7 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗಿದೆ.
ಇನ್ನೂ ಮುಂದುವರಿದು

ಶತಂ ಕೋಟಿಸಹಸ್ರಾಣಾಂ ಶಂಖ ಇತ್ಯಭಿಧೀಯತೇ ॥ 2 ॥

ವಿವರಣೆ: ಶಂಖ ಎಂದರೆ = 100 x 10000000 x 1000 ಎಂದು ಹೆಸರಿಡಲಾಗಿದೆ. ಶಂಖ ಎಂದರೆ 1 ರ ಮುಂದೆ ಎಷ್ಟು ಸೊನ್ನೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ನೀವೇ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

ರಾಮಾಯಣದ ಯುದ್ಧಕಾಂಡದ ಅಂತಿಮ ಶ್ಲೋಕದಲ್ಲಿ ವಾನರ ಸೈನ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯು $10^{10} + 10^{14} + 10^{20} + 10^{44} + 10^{54} + 10^{62} + 10^{69}$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗಿದೆ.

ಬ್ರಹ್ಮಾಂಡ ಪುರಾಣದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದ ಶಂಖವೂ ಮತ್ತು ರಾಮಾಯಣದಲ್ಲಿ ಹೆಸರಿಸಿರುವ ಶಂಖವೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕು. ರಾಮಾಯಣದ ಕಾಲ ಕ್ರಿ.ಪೂ 7, 8 ರ ಆಸುಪಾಸು ಎಂದು ಹೆಚ್ಚಿನ ಇತಿಹಾಸಕಾರರು ಭಾವಿಸಿರುತ್ತಾರೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಪಿಗಳು ಇದ್ದವೋ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೋ ಎನ್ನುವುದು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ. ಆಗಲೇ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯ ಬಳಕೆ ಪ್ರಚಲಿತದಲ್ಲಿತ್ತು ಎನ್ನುವುದು ಮುಖ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೊನ್ನೆಯ ಕಲ್ಪನೆ ಇಲ್ಲದೆ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದೇ ಇರುವುದರಿಂದ ಸೊನ್ನೆಯ ಆವಿಷ್ಕಾರವೂ ಆರ್ಯಭಟನಿಗಿಂತ ಮೊದಲೇ ಆಗಿತ್ತು ಎಂದು ತರ್ಕಿಸಬಹುದು. ಶೂನ್ಯ ಎಂಬ ಸಂಸ್ಕೃತ ಪದದ ತದ್ಭವವೇ ಸೊನ್ನೆ.

ಶಂಖ ಆದ ಮೇಲೆ ಮುಂದಿನ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ?

ಬಸವ ಭೂಪಾಲ (ಕ್ರಿ ಶ. 1700)ನ ಕೃತಿ ಶಿವತತ್ವರತ್ನಾಕರದಲ್ಲಿನ ಶ್ಲೋಕ:

ಖ ವ್ಯೋಮ ಖತ್ರಯ ಖ ಸಾಗರ ಷಟ್ಕನಾಗ
ವ್ಯೋಮಾಷ್ಟಶೂನ್ಯ ಯಮರೂಪ ನಗಾಷ್ಟಚಂದ್ರಾಃ।
ಬ್ರಹ್ಮಾಂಡ ಸಂಪುಟ ಪರಿಭ್ರಮಣೇ ಸಮಂತಾತ್
ಅಭ್ಯಂತರೇ ದಿನಕರಸ್ಯ ಕರ ಪ್ರಚಾರಃ ॥

ವಿವರಣೆ: ಸೂರ್ಯನಿಂದ ಹೊರಸೂಸುವ ಕಿರಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಆದರೂ ಈತನ ಪ್ರಕಾರ ಸೂರ್ಯನ ಕಿರಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ: 871,20,80,864,0000000 (871,20,80,864 ಕೋಟಿಗಳು). ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಸುಳ್ಳಾಗಿರಬಹುದು. ಅದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಮುಖ್ಯ ವಿಷಯ ಎಂದರೆ ಸೊನ್ನೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿದ ಭಾರತೀಯರು ದೊಡ್ಡ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು, ಊಹಿಸಲು ಹೆದರಲಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು? ಇದಕ್ಕೆ ಅಂತ್ಯ ಇಲ್ಲ.

ಬನ್ನಿ ಯಜುರ್ವೇದದ ಈ ಮಂತ್ರ ನಿಮಗಾಗಿ:
ಪೂರ್ಣಮದಃ ಪೂರ್ಣಮಿದಂ ಪೂರ್ಣಾತ್ ಪೂರ್ಣಮುದಚ್ಯತೇ।
ಪೂರ್ಣಸ್ಯ ಪೂರ್ಣಮಾದಾಯ ಪೂರ್ಣಮೇವಾವಶಿಷ್ಯತೇ॥

ಅನಂತದಿಂದ (∞) ಅನಂತ ಹುಟ್ಟುತ್ತದೆ. ಅನಂತದಿಂದ ಅನಂತವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಅನಂತವೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. $(\infty - \infty = \infty)$.

ಪೂರ್ಣ ಎಂದರೆ ಸೊನ್ನೆ ಎಂದೂ ಆಗುವುದರಿಂದ (0+0=0), (0–0)=0 ಎಂದೂ ತರ್ಕಿಸಬಹುದು. ಎನೇ ಇರಲಿ.

ಅಮೇರಿಕದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕ ಚಾರ್ಲ್ಸ್ ಸೈಫ್ ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕ 'Zero : The biography of a dangerous idea' ದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತಾನೆ:

“Greeks could not do this neat little mathematical trick. They did not believe in zero. The terms of the infinite series seemed to get smaller and smaller without particular end in sight. As a result they could not handle infinite. They pondered the concept of void but rejected zero as a number. They refused infinity. This is the biggest failure in the Greek mathematics and is the only thing that kept them from discovering calculus”.

ಭಾರತೀಯರ ಈ ಆವಿಷ್ಕಾರಗಳು ಅರಬರ ಮೂಲಕ ಯುರೋಪ್ ತಲುಪಿತು ಎನ್ನುವುದು ಇತಿಹಾಸ ಬಲ್ಲವರ ಅಭಿಪ್ರಾಯ.

ಭಾರತೀಯರ ಕೊಡುಗೆ ಬರೀ ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ ಅನಂತವೂ ಕೂಡ ಆಗಿದೆ. ಇಷ್ಟೇನಾ ಭಾರತೀಯರ ಕೊಡುಗೆ ಎಂದು ಎನಿಸಿದ್ದರೆ ಭೌಧಾಯನರ (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 8 ನೇ ಶತಮಾನ) ಸುಲ್ವ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿನ **'ಭುಜ ಕೋಟಿ ಕರ್ಣ ನ್ಯಾಯ'** ಹೀಗಿದೆ.

ದೀರ್ಘಚತುರಶ್ರಸ್ಯಾತ್ ಅಕ್ಷಣ್ಯಾ ರಜ್ಜುಃ ಪಾರ್ಶ್ವಮಾನೀ ತಿರ್ಯಂಗಾನೀ ಚ ಯತ್
ಪೃತಗ್ಭೂತೇ ಕುರುತಃ ತಮುಭಯಂ ಕರೋತಿ। (ಸುಲ್ವ ಸೂತ್ರ. 1.48)
ಶ್ಲೋಕದ ಅರ್ಥ: **ಆಯತದ ಕರ್ಣದ ವರ್ಗವು ಲಂಬ ಮತ್ತು ಬದಿಯ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ**
ಇದೇ ಈಗ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕಲಿಯುತ್ತಿರುವ ಸೂತ್ರ:

$(\text{ವಿಕರ್ಣ})^2 = (1 \text{ ನೇ ಬಾಹು})^2 + (2 \text{ ನೇ ಬಾಹು})^2$

ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಅಲ್ಲವೇ? ವಿಪರ್ಯಾಸವೆಂದರೆ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಕಾಲ ಕ್ರಿ.ಪೂ 5 ನೇ ಶತಮಾನ. ಆದರೆ ಬೋಧಾಯನರ ಕಾಲ ಕ್ರಿ.ಪೂ. 8 ನೇ ಶತಮಾನ. ಇನ್ನೊಂದು ಮುಖ್ಯ ವಿಷಯ ಗಮನಿಸಬೇಕೆಂದರೆ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನು ಈಜಿಪ್ಟ್, ಗ್ರೀಸ್ ಮತ್ತು ಭಾರತಕ್ಕೆ ಭೇಟಿ ನೀಡಿದ್ದನು ಎಂದು ಇತಿಹಾಸ ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆತ ಭಾರತಕ್ಕೆ ಬಂದಾಗ ಇದನ್ನು ಕಲಿತನೇ ಎನ್ನುವ ಸಂಶಯ ಬರುವುದು ಸಹಜ. ಆವಿಷ್ಕಾರ ಒಬ್ಬರದ್ದು ಆದರೆ ಹೆಸರು ಮಾತ್ರ ಬೇರೆಯವರದ್ದೇ?

ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಪಾಠ ಕಲಿತವರಿಗೆ ಅಥವಾ ಅಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದವರಿಗೆ ಪೈ (π) ಕುರಿತು ತಿಳಿದೇ ಇದೆ. ಅದರ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆ $\frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅದೊಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ (irrational number) ಎನ್ನುವುದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಈ ಕುರಿತು ಆರ್ಯಭಟನ (ಕ್ರಿ.ಶ. 475–550) ಸೂತ್ರ:

ಚತುರಧಿಕಂ ಶತಮಷ್ಟಗುಣಂ ದ್ವಾಶಷ್ಟಿಸ್ಥಥಾ ಸಹಸ್ರಾಣಾಂ।
ಅಯುತದ್ವಯವಿಶ್ಕಂಭಸ್ಯಾಸನ್ನೋ ವೃತ್ತಪರಿಣಾಹಃ ॥

ಶ್ಲೋಕದ ಅರ್ಥ: 4 ನ್ನು 100 ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿ 8 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ 62,000 ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದು 20000 ಮಾನದ ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಅಂದಾಜು ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\pi = \frac{\text{ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ}}{\text{ವ್ಯಾಸ}} = \frac{\{(4+100)\text{x}8+62000\}}{20000} = \frac{62832}{20000} = 3.1416$$

ಇದು 3.1415926535897... ಗೆ ಎಷ್ಟು ಹತ್ತಿರವಿದೆ ಎಂದು ನೀವೇ ಗಮನಿಸಿ.

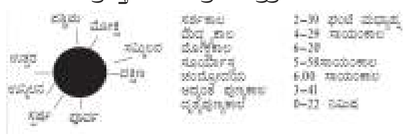
1700 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಆತ ಹೀಗೆ π ಗೆ ಅತಿ ನಿಖರವಾದ ಸಮೀಪಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡಿದನು ಎನ್ನುವುದು ಆಶ್ಚರ್ಯ ಎನ್ನಿಸುತ್ತದೆ ಅಲ್ಲವೇ?

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಕ್ರಿ ಶ. 12 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಬಿಜಾಪುರದವರಾದ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು **ಲೀಲಾಜಾಲವಾಗಿ ಗಣಿತ ಕಲಿತ ಲೀಲಾವತಿ ಮತ್ತು ಕಲಿಸಿದ ಭಾಸ್ಕರ** ಎನ್ನುವ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೂ ಸಂಬಂಧ ವಿದೆಯೇ? ಇದೇನಿದು ಇಲ್ಲಿ ಜ್ಯೋತಿಷ್ಯ ಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಷಯ ಏಕೆ ಬಂದಿದೆ ಎನ್ನುವ ಸಂದೇಹವೇ?

ಗ್ರಸ್ತಾಸ್ತ ಖಂಡಗ್ರಾಸ ಸೂರ್ಯಗ್ರಹಣ

ಗ್ರಸ್ತೋದಯ ಖಗ್ರಾಸ ಚಂದ್ರಗ್ರಹಣಂ



ನೀವೆಲ್ಲರೂ ಪಂಚಾಂಗವನ್ನು ನೋಡುತ್ತೀರಾದರೆ. ಕೆಲವು ವರ್ಷದ ಪಂಚಾಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಸೂರ್ಯ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರಗ್ರಹಣದ ಕುರಿತೂ ಬರೆದಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ ಅಲ್ಲವೇ? ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಗ್ರಹಣದ ಸ್ಪರ್ಷ ಕಾಲ, ಮೋಕ್ಷ ಕಾಲ ಮತ್ತು ಅವಧಿಯನ್ನೂ ಅಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. ಅಲ್ಲಿ ನೀಡುವ ಸಮಯಕ್ಕೂ ಈಗಿನ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ನೀಡುವ ಸಮಯಕ್ಕೂ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಪಂಚಾಂಗಕರ್ತರು ಮುಂದಿನ ನೂರಾರು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಗ್ರಹಣವನ್ನು ಈಗಲೇ ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಸಮಯವನ್ನು ಹೇಗೆ ತಿಳಿಸಲು ಸಮರ್ಥರು ಎನ್ನುವ ಅಚ್ಚರಿ ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಮೂಡಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ? ಅದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಆರ್ಯಭಟ. ಗ್ರಹಗಳ ಚಲನವಲನದ ಕುರಿತಾದ ಆತನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನೂ ಈಗಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನೂ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು:

ಸಂ	ಅಳತೆ	ಆರ್ಯಭಟನ ಲೆಕ್ಕ	ಈಗಿನ ಲೆಕ್ಕ	ವ್ಯತ್ಯಾಸ
1	π	3.1416	3.1415926535897 . .	0.0002 %
2	ಭೂಮಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ	39,968.0582 ಕಿ. ಮೀ.	40,075.0167 ಕಿ. ಮೀ.	0.2%
3	ದಿನದ ಅವಧಿ	23 ಗಂ, 56 ನಿ. 4.1 ಸೆ.	23 ಗಂ. 56 ನಿ 4.09 ಸೆ	ಕೇವಲ 0.01 ಸೆ.
4	ವರ್ಷದ ಸರಾಸರಿ ದಿನಗಳು	365.2421756	365.2421904	ಕೇವಲ 1.4 ಸೆ.

ದೂರದರ್ಶಕ, ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್, ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಇಲ್ಲದ ಕಾಲದಲ್ಲೇ ಈ ರೀತಿ ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುತ್ತಿದ್ದ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮತ್ತು ಖಗೋಲಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರನ್ನು ನಾವು ಸ್ಮರಿಸಲೇ ಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೂ ಮುಂಚೆ ಕ್ರಿ ಪೂ 9 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದ ಯಾಜ್ಞವಲ್ಕ್ಯರು ತಮ್ಮ **ಶತಪಥ ಬ್ರಾಹ್ಮಣ** ದಲ್ಲಿ ಸೂರ್ಯ, ಚಂದ್ರ ಮತ್ತು ಭೂಮಿಯ ಕುರಿತು ತಿಳಿಸಿದುದು ಈ ಮುಂದಿನಂತಿದೆ.

ಭೂಮಿಯು ದುಂಡಗಿದೆ. ಸೂರ್ಯನು ಭೂಮಿ, ಗ್ರಹಗಳು ಮತ್ತು ಆಕಾಶವನ್ನು ಬಂಧಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಆತನು ಭೂಮಿಗಿಂತ ಬಹು ಪಾಲು ದೊಡ್ಡವನು. ಸೂರ್ಯನು ಭೂಮಿಯ ವ್ಯಾಸದ 108 ಪಟ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾನೆ. ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರನ ನಡುವಿನ ದೂರ ಚಂದ್ರನ ವ್ಯಾಸದ 108 ಪಟ್ಟು. (ಈಗಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಪ್ರಕಾರ ಅದು ಕ್ರಮವಾಗಿ 107.6 ಮತ್ತು 110.6 ಆಗಿದೆ!)

ಈ ರೀತಿಯ ಸೂರ್ಯ, ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರರ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದಿಂದಾಗಿಯೇ ಹಿಂದೂ ಸಂಪ್ರದಾಯದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 108 ಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಮಹತ್ವ ಇದೆಯೇ? (ಈ ಕಾರಣದಿಂದಲೇ ದೇವರುಗಳ ಅಷ್ಟೋತ್ತರ ಶತನಾಮದಲ್ಲಿ 108 ಹೆಸರು ಇರುತ್ತದೆಯೇ?).

ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಕ್ರಿ.ಪೂ. 8 ಮತ್ತು 10ನೇ ಶತಮಾನದಿಂದಲೇ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಸಂಶೋಧನೆಯಿಂದಾಗಿ ಮುಂದಿನ ತಲೆಮಾರಿನ ಪ್ರಪಂಚದಾದ್ಯಂತದ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಈ ರೀತಿಯ ಸಾಧನೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು ಎನ್ನಬಹುದೇ? ನಮ್ಮ ಗಣಿತಜ್ಞರು ತಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದು ಎಂದು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಹೇಳಿಕೊಳ್ಳಲಿಲ್ಲ. ಅವರಿಗೆ ಪ್ರಚಾರ ಬೇಕಿರಲಿಲ್ಲ.

ಲೀಲಾಜಾಲವಾಗಿ ಗಣಿತ ಕಲಿತ ಲೀಲಾವತಿ ಮತ್ತು ಕಲಿಸಿದ ಭಾಸ್ಕರ

ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ ನಮ್ಮದೇ ವಿಜಯಪುರದವನು. ಆದರೆ ಆತನ ಕರ್ಮಭೂಮಿ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಹೆಸರಾಗಿದ್ದ ಉಜ್ಜಯಿನಿಯಾಗಿತ್ತು. ಕ್ರಿ.ಶ. 12ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದನು ಎಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಈತನ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಗ್ರಂಥದ ಹೆಸರು ಸಿದ್ಧಾಂತ ಶಿರೋಮಣಿ. ಇಲ್ಲಿನ ಮೊದಲ ಭಾಗವೇ ಲೀಲಾವತಿ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಭಾಗಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ, ಗೋಳಾಧ್ಯಾಯ (ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ) ಮತ್ತು ಗ್ರಹಗಣಿತ (ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ)ಗಳು ಆಗಿವೆ.

ಮೊದಲ ಭಾಗ ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಷಯವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಆತ ವಿಷಯಾನುಸಾರವಾಗಿ ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡಿರುವಾಗ ಮೊದಲ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸುವ ಬದಲು ಲೀಲಾವತಿ ಎಂದು ಏಕೆ ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾನೆ ಎನ್ನುವ ಸಂದೇಹ ನಿಮಗೆ ಬಂದಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ? ಕಾರಣ ಏನಿರಬಹುದು?

ಅವನಿಗೆ ಒಬ್ಬಳೇ ಮುದ್ದಿನ ಮಗಳು. ಹೆಸರು ಲೀಲಾವತಿ. ಮಗಳ ಮೇಲೆ ಬಲು ಪ್ರೀತಿ. ಆಗಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರಚಲಿತವಾಗಿದ್ದಂತೆ ಅವಳು 13–14 ವರ್ಷದವಳು ಆಗಿರುವಾಗ ಯೋಗ್ಯ ವರನನ್ನು ಹುಡುಕುತ್ತಾನೆ. ಸರಿ, ಲಗ್ನಕ್ಕಾಗಿ ಮುಹೂರ್ತ ಇಡಬೇಕಲ್ಲವೇ? ಎಷ್ಟಾದರೂ ಗಣಿತಜ್ಞ, ಕಾಲದ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಟೈಟಾನ್, ರೋಲೆಕ್ಸ್, ಟೈಮೆಕ್ಸ್ ವಾಚುಗಳು ಇರದ ಕಾಲವದು. ಕಾಲದ ಅಳತೆಗೆ ಜಲಯಂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಮಣ್ಣಿನ ಮಡಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ತೂತು ಮಾಡಿ ನೀರಿನ ಮೇಲೆ ತೇಲಿ ಬಿಡುತ್ತಿದ್ದರು. ಮಡಿಕೆ ನೀರಲ್ಲಿ ಮುಳುಗುವುದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಕಾಲವನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಕ್ರಮ ಅದು ಆಗಿತ್ತು. ಸರಿ, ಅದೇ ರೀತಿ ವಿವಾಹ ಮುಹೂರ್ತಕ್ಕಾಗಿ ಮದುವೆಯ ದಿನ ಈ ಜಲಯಂತ್ರವನ್ನು ಆತ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾನೆ. ಮಡಿಕೆಯು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿದಾಗ ಮದುವೆಯ ಮುಹೂರ್ತ ಎಂದು ನಿಶ್ಚಯಿಸುತ್ತಾನೆ. ಲೀಲಾವತಿಯೋ ಬಲು ಚೂಟಿ. ವಯೋಸಹಜವಾದ ಕುತೂಹಲದಿಂದ ಮದುವೆಯ ದಿನ ನೀರು ತುಂಬುತ್ತಿರುವ ಜಲಯಂತ್ರವನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾ ಇರುವಾಗ ಯಾರೋ ಅವಳನ್ನು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಆ ಧಾವಂತದಲ್ಲಿ ಅವಳು ಧರಿಸಿದ್ದ ಮುತ್ತಿನ ಹಾರ ಕಂಬವೊಂದಕ್ಕೆ ಸಿಕ್ಕಿ, ಹಾರ ತುಂಡಾಗಿ ಮುತ್ತೊಂದು ಹಾರಿ ಜಲಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಅದರಿಂದಾಗಿ ಜಲಯಂತ್ರದ ತೂತು ಭಾಗಶಃ ಮುಚ್ಚಿ ಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ನೀರು ತುಂಬುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ನಿಗದಿಯಾದ ಮುಹೂರ್ತ ತಪ್ಪಿ, ಅವಳ ಮದುವೆ ನಡೆಯುತ್ತದೆ. ಕಾಕತಾಳಿಯವಾಗಿ ಒಂದೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅವಳ ಗಂಡ ಸಾಯುತ್ತಾನೆ. ಲೀಲಾವತಿ ಖಿನ್ನಳಾಗುತ್ತಾಳೆ. ಬಲು ಬುದ್ಧಿವಂತೆ ಮತ್ತು ಚೂಟಿಯಾದ ಮಗಳ ಉದಾಸೀನತೆಯನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲು ಅವಳಿಗೆ ಗಣಿತ ಕಲಿಸಲು ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ ಮುಂದಾಗುತ್ತಾನೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ **ಲೀಲಾವತಿ** ಎನ್ನುವ ಗಣಿತ ಗ್ರಂಥದ ಭಾಗವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗೂ ಅವಳನ್ನು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪ್ರಬುದ್ಧಳನ್ನಾಗಿಸುತ್ತಾನೆ. ಹೀಗಾಗಿಯೇ ಮೊದಲ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸುವ ಬದಲು ಮಗಳ ಹೆಸರಾದ ಲೀಲಾವತಿ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿದ್ದಾನೆ ಎಂದು ತರ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಅವಳ ಮುಂದೆ ನೂರಾರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇಟ್ಟು ಅವಳಲ್ಲಿ ಕುತೂಹಲ ಬರಿಸಿ ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತಾನೆ. ಹೆಚ್ಚಿನ ಶ್ಲೋಕಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಲೇ ಎನ್ನುವ ಪದವನ್ನು ಬಳಸಿರುತ್ತಾನೆ. ಈ ಮುಂದಿನ ಶ್ಲೋಕ ಗಮನಿಸಿ.

**ಬಾಲೇ ಬಾಲಕುರಂಗಲೋಲ ನಯನೇ ಲೀಲಾವತೀ ಪ್ರೋಚ್ಯತಾಂ
ಪಂಚತ್ರ್ಯೈಕಮಿತಾ ದಿವಾಕರಗುಣಾ ಅಂಕಾಃ ಕತಿಸುರ್ಯದಿ...**

ಇಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಮಗಳಾದ ಲೀಲಾವತಿಯನ್ನು ಬಾಲೆ ಎಂದು ಸಂಬೋಧಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸಲು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ ಅಂದರೆ ಬಹುಶ: ಲೀಲಾವತಿಯ ವಯಸ್ಸು 15 ಅಥವಾ 16 ಇರಬಹುದು. ಈ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಹಾಗೆ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ, ಅನುಪಾತ, ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ, ಲಾಭ ನಷ್ಟ, ಶ್ರೇಣಿ, ಶ್ರೇಢಿ, ವಿಕಲ್ಪ, ಕ್ರಮಯೋಜನೆ, ರೇಖಾಗಣಿತ, ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳು, ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಇವೆ. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದಾದರೆ ಈಗಿನ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಂತೆ ಸುಮಾರು ಪಿಯುಸಿ ವರೆಗಿನ ಗಣಿತ ಪಾಠಗಳು ಇಲ್ಲಿವೆ. ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದೇ ಇಲ್ಲಿನ ಪಾಠಗಳು. ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ ಪದ್ಯರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ಕಲಿಯುವುದು ಸುಲಭ. ಪ್ರಾಣಿ, ಪಕ್ಷಿ, ಯುವಕ ಯುವತಿಯರ ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ, ಪ್ರಕೃತಿಯ ವರ್ಣನೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ, ಉಪಮೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿ ಚಿತ್ತಾಕರ್ಷಕವಾಗಿ ಮಗಳಿಗೆ ಬೋಧಿಸುತ್ತಾನೆ. ಹೀಗಾಗಿ ನಮ್ಮ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಪಾಠಗಳಂತೆ ನೀರಸವಾಗಿ ಅವು ಇಲ್ಲ. ಈಗ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು 300 ಶ್ಲೋಕಗಳು ಮಾತ್ರ ಲಭ್ಯವಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆ ಗಮನಿಸಿ. ಇದು ಈಗಿನ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಂತೆ ಎಂಟನೆಯ ಅಥವಾ ಹತ್ತನೆಯ ತರಗತಿಯ ಪಾಠಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ. ಸಮಸ್ಯೆ:

**ಪಾರ್ಥಃ ಕರ್ಣವಧಾಯ ಮಾರ್ಗಣಗಣಂ ಕ್ರುದ್ಧೋ ರಣೇ ಸಂದಧೇ
ತಸ್ಯಾರ್ಧೇನ ನಿವಾರ್ಯ ತತ್ ಶರಗಣಂ ಮೂಲೈಃ ಚತುರ್ಭಿಃ ಹಯಾನ್।
ಶಲ್ಯಂ ಷಡ್ಭಿಃ ರಥೇಷುಭಿಃ ತ್ರಿಭಿರಪಿ ಚ ಛತ್ರಂ ಧ್ವಜಂ ಕಾರ್ಮುಕಂ
ಚಿ ಛೇದಾಸ್ಯ ಶಿರಃ ಶರೇಣ ಕತಿ ತೇ ಯಾನರ್ಜುನಃ ಸಂದಧೇ ॥71॥**

ಅನುವಾದ : ಅರ್ಜುನನು ಮಹಾಭಾರತ ಯುದ್ಧದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣನನ್ನು ಕೊಲ್ಲಲು ಬತ್ತಳಿಕೆಯಿಂದ ಹಲವು ಬಾಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತಾನೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧದಷ್ಟರಿಂದ ಕರ್ಣನ ಬಾಣಗಳನ್ನು ತುಂಡರಿಸುತ್ತಾನೆ. ತೆಗೆದ ಬಾಣಗಳ ವರ್ಗಮೂಲದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟರಿಂದ ಕುದುರೆಗಳನ್ನೂ, 6 ರಿಂದ ಶಲ್ಯನನ್ನೂ 3ರಿಂದ ಕೊಡೆ ಬಾವುಟ ಮತ್ತು ಬಿಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಮುರಿದು ಉಳಿದ 1 ಬಾಣದಿಂದ ಅವನ ತಲೆಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ ಅರ್ಜುನನು ತೆಗೆದ ಬಾಣಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯೆಷ್ಟು? ಗಣಿತ ಹೆಚ್ಚು ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣವೇ?

ತೆಗೆದ ಬಾಣಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ **x** ಇರಲಿ.

ಹಂತ	ಏತಕ್ಕೆ	ಎಷ್ಟು?
1	ಕರ್ಣನ ಬಾಣಗಳನ್ನು ತುಂಡರಿಸಲು	$\frac{x}{2}$
2	ಕರ್ಣನ ಕುದುರೆಗಳನ್ನು ಕೊಲ್ಲಲು	$4\sqrt{x}$
3	ಶಲ್ಯನ ಮೇಲೆ	6
4	ಕರ್ಣನ ರಥದ ಕೊಡೆ ಮತ್ತು ಬಾವುಟಗಳ ಮೇಲೆ	$(1+1+1) = 3$
5	ಕರ್ಣನ ಮೇಲೆ	1

$$\therefore\ X = \frac{x}{2} + 4\sqrt{x} + 6 + 3 + 1 = \frac{x}{2} + 4\sqrt{x} + 10$$

1	ಎರಡೂ ಕಡೆ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ	$2x = x + 8\sqrt{x} + 20$
2	ಪದಗಳನ್ನು ಎಡಗಡೆಗೆ ಕೊಂಡುಹೋದಾಗ	$2x - x - 20 = 8\sqrt{x}$
3	ಎಡ ಭಾಗವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದಾಗ	$x - 20 = 8\sqrt{x}$
4	ಎರಡೂ ಕಡೆ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದಾಗ	$(x - 20)^2 = 8*8*\sqrt{x}*\sqrt{x}$
5	ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದಾಗ	$(x - 20)*(x-20) = 64x$
6	ಎಡ ಭಾಗವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ	$x^2 - 20x - 20x + 400 = 64x$
7	64x ನ್ನು ಎಡಕ್ಕೆ ಕೊಂಡುಹೋದಾಗ	$x^2-104x + 400 = 0$
8	-104x ನ್ನು ವಿಭಜಿಸಿದಾಗ	$x^2-100x - 4x + 400 = 0$
9	ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊರತೆಗೆದಾಗ	$x (x-100) - 4 (x-100) = 0$
10	ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊರತೆಗೆದಾಗ	$(x-100) * (x-4) = 0$
11	ಉತ್ತರ	$x = 100$ ಅಥವಾ $x = 4$

ಅಂದರೆ ಅರ್ಜುನನ ಬತ್ತಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ 100 ಅಥವಾ 4 ಬಾಣಗಳು ಇದ್ದವು. ಆದರೆ 6 ಬಾಣಗಳನ್ನು ಶಲ್ಯನ ಮೇಲೆ ಬಿಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ ಉತ್ತರ 4 ಆಗಲಿಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ಅವನು ಬತ್ತಳಿಕೆಯಿಂದ 100 ಬಾಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿರಲೇ ಬೇಕು. ಇದೇ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಉತ್ತರ.

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆ

(ಗಮನಿಸಿ: ಭುಜಕೋಟಿ ಕರ್ಣ ನ್ಯಾಯ–ಬೌಧಾಯನ–ಕ್ರಿ.ಪೂ 8ನೇ ಶತಮಾನ)

ಅಸ್ತಿ ಸ್ತಂಭತಲೇ ಬಿಲಂ ತದುಪರಿ ಕ್ರೀಡಾಶಿಖಂಡೀ ಸ್ಥಿತಃ ಸ್ತಂಭೇ ಹಸ್ತನವೋಚ್ಛ್ರಿತೇ
ತ್ರಿಗುಣಿತ ಸ್ತಂಭಪ್ರಮಾಣಾಂತರೇ ।
ದೃಷ್ಟ್ವಾಹಿಂ ಬಿಲಮಾವ್ರಜಂತಮಪತತ್ತಿರ್ಯಕ್ ಸ ತಸ್ಯೋಪರಿ ಕ್ಷಿಪ್ರಂ ಬ್ರೂಹಿ
ತಯೋರ್ಬಿಲಾತ್ಕತಿಮಿತೈಃ ಸಾಮ್ಯೇನ ಗತ್ಯೋರ್ಯುತಿಃ ॥152॥

ಅನುವಾದ : ಒಂದು ಕಂಬದ ಬುಡದಲ್ಲಿ ಹುತ್ತವಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ ನವಿಲು ಕೂತಿದೆ. ಕಂಬದ ಎತ್ತರ 9 ಮೊಳಗಳು. ಕಂಬದ ಮೂರರಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿಂದ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಬರುತ್ತಿರುವ ಹಾವನ್ನು ನೋಡಿ ಅದನ್ನು ತಿನ್ನಲು ಹಾರುತ್ತದೆ. ಅವೆರಡೂ ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಹೊರಟರೆ ಹುತ್ತದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಅವೆರಡರ ಸಮಾಗಮವಾಗುವುದು ಬೇಗ ಹೇಳು (ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಎಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ– ಅಂದರೆ ಲೆಕ್ಕ ನೀಡುವಾಗಲೂ ಅಷ್ಟು ಪರಿಪೂರ್ಣತೆ).

ಉತ್ತರ : 12 ಮೊಳಗಳು (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು www.FREEganita.com ನಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದೆ)

<u>**ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆ:**</u>

ವೃಕ್ಷಾದ್ಧಸ್ತಶತೋಚ್ಛ್ರಯಾಚ್ಛತಯುಗೇ ವಾಪೀಂ ಕಪಿಃ ಕೋಪ್ಯಗಾದುತ್ತೀರ್ಯಾಥ
ಪರೋದ್ರುತಂ ಶ್ರುತಿಪಥೇನೋಡ್ಡೀಯ ಕಿಂಚಿದ್ದ್ರುಮಾತ್।
ಜಾತೈವಂ ಸಮತಾ ತಯೋರ್ಯದಿ ಗತಾವುಡ್ಡೀಯಮಾನಂ ಕಿಯದ್ವಿದ್ವನ್
ಚೇತ್ಸುಪರಿಶ್ರಮೋಸ್ತಿ ಗಣಿತೇ ಕ್ಷಿಪ್ರಂ ತದಾಚಕ್ಷ್ವಮೇ ॥157॥

ಅನುವಾದ : 100 ಮೊಳ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಮರದ ತುದಿಯಿಂದ ಒಂದು ಕಪಿಯು ಕೆಳಗೆ ಇಳಿದು 200 ಮೊಳ ದೂರವಿರುವ ಕೊಳಕ್ಕೆ ಹೋಯಿತು. ಇನ್ನೊಂದು ಕಪಿಯು ಮರದ ತುದಿಯಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಸ್ವಲ್ಪ ನೆಗೆದು ಕರ್ಣದ ದಾರಿಯಿಂದ ಅದೇ ಕೊಳವನ್ನು ಮುಟ್ಟಿತು. ಆ ಎರಡೂ ಕಪಿಗಳು ಒಂದೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿದ್ದರೆ ಎರಡನೇ ಕಪಿಯು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರ ಹಾರಿತು ಎಂದು ತಿಳಿಸು.

ಉತ್ತರ: 50 ಮೊಳ (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು www.FREEganita.com ನಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದೆ)

ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಆಚೆಗೆ

ಸಂಖ್ಯೆ 123456789ಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

1. ಸಂಖ್ಯೆ 123456789 ರ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ 45 (= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)
2. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ 246913578.ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತವೂ 45 (= 2 + 4 + 6 + 9 + 1 + 3 + 5 + 7 + 8).
3. ಇದರಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 9 ರ ವರೆಗೆ ಪ್ರತೀ ಅಂಕೆಯು ಇದ್ದುದಲ್ಲದೇ ಯಾವುದೇ ಅಂಕೆಯು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ!
4. 123456789ನ್ನು 4, 5, 7, 8 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

9 ರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಅವು: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117..) ಇವುಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವಾಗಲೂ 9(1 + 8 = 9, 2 + 7 = 9..) ಆಗಿರುವುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿ.

ಈ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

$1^2 = 1 = 1$

$2^2 = 4 = 1 + 3$

$3^2 = 9 = 1 + 3 + 5$

$4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$

$5^2 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

$6^2 = 36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

$7^2 = 49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

$8^2 = 64 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$

$9^2 = 81 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$

$10^2 = 100 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$

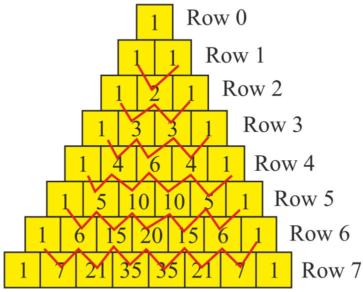
$11^2 = 121 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$

$12^2 = 144 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23$

ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ?

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನುಕ್ರಮಿಕವಾದ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆಶ್ಚರ್ಯವೆನಿಸುವುದೇ? ಇದರ ಹಿಂದೆ ಗಣಿತದ ಸೂತ್ರವಿದೆ. $(a+b)^2$ ಸೂತ್ರದಂತೆ $(n+1)^2=n^2+2n+1^2=n^2+(2n+1)$. ಇಲ್ಲಿ 2n+1ಎನ್ನುವುದು ಹಿಂದಿನ n^2 ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯ ಮುಂದಿನ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ.

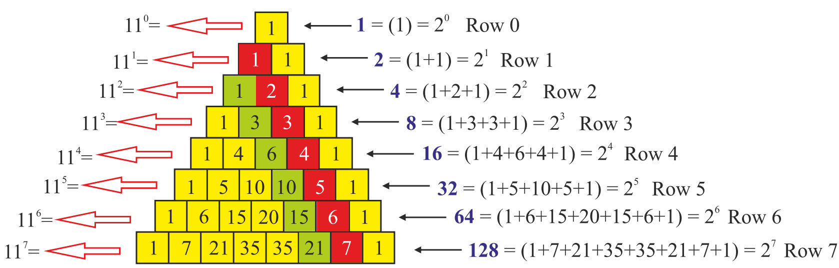
ಮೇರು ಪ್ರಸ್ತಾರ: ಕೆಳಗಿನ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:



ಈ ತ್ರಿಕೋನಾಕಾರದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ತುತ್ತ ತುದಿಯ ಮೊದಲ ಚೌಕದೊಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆಗಿದ್ದು ಇದು Row 0 ಆಗಿದೆ. ಯಾವುದೇ ಸಾಲಿನ ಎರಡು ಅಂತಿಮ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿನ ಚೌಕದ ಪಕ್ಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 0 ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. Row 1 ಸಾಲಿನ ಚೌಕದೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳು 1 ಮತ್ತು 1 ಆಗಿವೆ. ಇದು ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಚೌಕದಲ್ಲಿನ 1 ಮತ್ತು 0 ಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. Row 2 ಸಾಲಿನ ಚೌಕದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 1, 2, 1 ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಚೌಕದಲ್ಲಿರುವ 0, 1, 1, 1 ಮತ್ತು 0, 1 ರ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. (0 + 1 = 1; 1 + 1 = 2; 1 + 0 =1). Row 3 ಸಾಲಿನ ಚೌಕದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 1, 3, 3, 1 ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಚೌಕದಲ್ಲಿರುವ 0, 1, 1, 2, 2, 1 ಮತ್ತು 0, 1 ರ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. (0 + 1 = 1; 1 + 2 = 3; 2 + 1 = 3; 0 + 1 = 1). ಹೀಗೆಯೇ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನ ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸಬಹುದು. [ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, n ಎನ್ನುವುದು ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ಮತ್ತು r ಎನ್ನುವುದು ಚೌಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಚೌಕದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತೀ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ${}_nC_{(r-1)} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$ ಇಂದ ತುಂಬಿಸಬಹುದು].

ಕ್ರಿ. ಪೂ. 2ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದ ಪಿಂಗಳನು ತನ್ನ ಛಂದಸ್ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಈ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ, ಇದನ್ನು ಮೇರು ಪ್ರಸ್ತಾರ (ಮೇರು ಪರ್ವತದ ಮೆಟ್ಟಿಲು) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗಿತ್ತು. ಇದಕ್ಕೆ ಕ್ರಿ.ಶ. 10ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದ ಹಲಾಯುಧನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ನೀಡಿದ್ದಾನೆ. ವಿಪರ್ಯಾಸವೆಂದರೆ ಇದನ್ನು 1900 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಭಾರತೀಯರು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದರೂ, ಕ್ರಿ.ಶ. 17ನೇ ಶತಮಾನದ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್ ನ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ!

ಪಿಂಗಳನ ಮೇರುಪ್ರಸ್ತಾರದ ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:



ಇಲ್ಲಿ n ಎನ್ನುವುದು (0 ಯಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ) ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ

1. ಚೌಕದೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವಾಗಲೂ 2^n (ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿ ಅಂಕೆಗಳು) (ಉದಾ: $1 = 2^0$, $1 + 1 = 2 = 2^1$, $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$ ....)

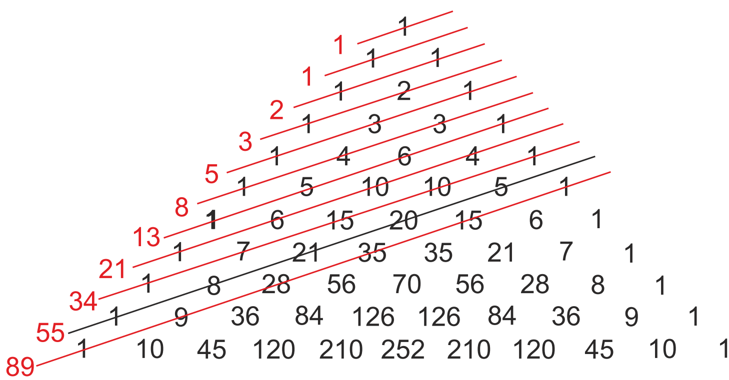
2. ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವಾಗಲೂ 11^n ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ (ಉದಾ: $1 = 11^0$, $11 = 11^1$, $121 = 11^2$, $1331 = 11^3$, 11^5 ನಂತರ ಸಂಖ್ಯೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಬೇರೆ ರೂಪ ಪಡೆಯುತ್ತದೆ)

3. ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಚೌಕದಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣದ ಅಂಕೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...)

4. ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ ಚೌಕದಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಅದೇ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಅಂಕೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಅದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ($1 = 1^2$, $3 + 1 = 4 = 2^2$, $6 + 3 = 9 = 3^2$, $10 + 6 = 16 = 4^2$,.)

5. ಯಾವುದೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ 2 ನೇ ಅಂಕೆಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ (2ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ), ಆ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಅಂಕೆಗಳು ಅದರ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಉದಾಹರಣೆಗೆ 3ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 3, 3 ; 5ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 5, 10, 10, 5 ; 7ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 7, 21, 35, 35, 21, 7)

ಮೇಲಿನ ಮೇರುಪ್ರಸ್ತಾರವನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಾಗ :



ಮೊದಲನೆಯ 1ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಅಂಕೆಗಳು ಕೆಂಪು ರೇಖೆಯಿಂದ ಗೆರೆ ಎಳೆದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ಅವು (1 , 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89..)

ಮೊದಲನೆಯ 1ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮೇಲಿನ ಹಿಂದಿನ 2 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅವು

(2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, 8 = 5 + 3, 13 = 8 + 5, 21 = 13 + 8, 34 = 21 + 13...)

ಈ ಸರಣಿಯನ್ನು ಪಿಂಗಳನ ನಂತರ ಜನಿಸಿದ ಇಟೆಲಿಯ ಗಣಿತಜ್ಞ ಫಿಬೊನಾಚ್ಚಿ (12 ನೇ ಶತಮಾನ) ಸರಣಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎಂತಹ ವಿಪರ್ಯಾಸ!

ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲೇ ಓದಿ, ವಿವೇಕ ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜು (ಕೋಟ) ದಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ಪಿ.ಯು.ಸಿ ಓದುತ್ತಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ:

ಉನ್ನತಿ

ಗಣಿತ ಅಂದರೆ ಗುಮ್ಮ ಅಲ್ಲ, ಅದು ನಮ್ಮ ಜೀವನದ ಮುಖ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ವಿಷಯವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸುಲಭಗೊಳಿಸಲು ಶ್ರೀ ರಾಜಶೇಖರ ಸೋಮಯಾಜಿಯವರು **FREEganita.com** ವೆಬ್‌ಸೈಟನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ಇಂಗ್ಲಿಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ತರಗತಿ 8,9,10ರ ಪಾಠಗಳು ಲಭ್ಯವಿದೆ. ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿರುವ ಧ್ವನಿಮುದ್ರಿತ ಪಾಠಗಳನ್ನು ವಿಷಯವಾರು ಆಗಿಯೂ ಆಲಿಸುವ ಆಯ್ಕೆಯಿದೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ, ಆ ಪಾಠಗಳು ಯಾವ ತರಗತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ ಎನ್ನುವುದು ತಿಳಿಯುವುದಲ್ಲದೇ, ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳ ಪಾಠಗಳ ಪುನರವಲೋಕನ ಮಾಡಲು ಸಹಾಯವಾಗುವುದೇ ಇಲ್ಲಿನ ವಿಶೇಷ.

ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಷ್ಟ. ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ವೆಬ್‌ಸೈಟಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಪಾಠದ ಆಡಿಯೋ, ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಪರಿಹಾರ, ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಕನ್ನಡ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಎರಡರಲ್ಲೂ ಪಠ್ಯವು ಪಿ.ಡಿ.ಎಫ್. ಮುಖಾಂತರ ಇರುವುದರಿಂದ ಮಾಧ್ಯಮ ಬದಲಿಸಿದಾಗ ಸಹಾಯಕ್ಕೆ ಬರಲಿದೆ. ಈ ಪಾಠಗಳನ್ನು ಡೌನ್‌ಲೋಡ್ ಮಾಡಿಕೊಂಡೂ ನೋಡಬಹುದು. ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇರದ, ನಿತ್ಯಜೀವನಕ್ಕೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಬ್ಯಾಂಕಿಂಗ್, ಪಾಲುಗಾರಿಕೆ,.... ಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪಾಠಗಳೂ ಇಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯ. ಇಷ್ಟೆ ಅಲ್ಲ, ಇನ್ನೊಂದು ವಿಶೇಷವೆಂದರೆ ಗಣಿತಜ್ಞ ಭಾಸ್ಕರ ಆಚಾರ್ಯರ ಪರಿಚಯದೊಂದಿಗೆ ಅವರ ಗಣಿತಗ್ರಂಥ 'ಲೀಲಾವತಿ'ಯಿಂದ ಆಯ್ದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೂ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಈ 'ಗಣಿತಸೂತ್ರ' ಕೈಪಿಡಿಯಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಒಂದೆಡೆ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಿ ನೀಡಿರುವುದು 8,9,10ರ ಪರೀಕ್ಷೆ ತಯಾರಿಯಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕ್ಕೆ ಬರಲಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸೋಲುವವರಿಗೆ ಗೆಲುವಿನ ಭರವಸೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಕೇಶವ ಉಪಾಧ್ಯ

ಎಲ್ಲಾ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಪಡೆದ ಗಣಿತವನ್ನು **FREEganita.com** ಎಂಬ ವೆಬ್‌ಸೈಟ್ ಮುಖಾಂತರ ಉಚಿತವಾಗಿ ಕಲಿಸಹೊರಟಿದ್ದಾರೆ ಶ್ರೀ ರಾಜಶೇಖರ ಸೋಮಯಾಜಿಯವರು. ಯಾವುದೇ ವೈಯ್ಯಕ್ತಿಕ ಮಾಹಿತಿ ನೀಡದೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಪ್ರವೇಶಿಸಬಹುದಾದ ಈ ವೆಬ್‌ಸೈಟ್ ಉಚಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ನಮ್ಮಂತಹ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೆ ತಯಾರಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಗಣಿತದ ತಳಹದಿಯನ್ನು ಹಾಕಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಜೊತೆಗೆ ಹಳೆಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಪಾಠಗಳು ಕನ್ನಡ ಹಾಗೂ ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಗಳೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ pdf ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು, ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಧ್ವನಿ ಮುದ್ರಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿದೆ. ವೆಬ್‌ಸೈಟ್ ನಲ್ಲಿ ನನಗೆ ಮೆಚ್ಚುಗೆಯಾದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವೆಂದರೆ 8,9 ಮತ್ತು 10 ತರಗತಿಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಅಭ್ಯಾಸದ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಾಗ ಆಗುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಆಯಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಭಯ ಪಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗಲಿದೆ ಎಂಬುದು ನನ್ನ ಅಭಿಪ್ರಾಯ. ಇಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಪಾಠಗಳಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಎಲ್ಲರೂ ತಿಳಿದಿರಬೇಕಾದ ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಷಯಗಳ ಕುರಿತು ಸಾಕ್ಷ್ಯಚಿತ್ರಗಳನ್ನೂ ಅಳವಡಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ. ನಾನು ಮತ್ತು ನನ್ನ ಸಹಪಾಠಿಗಳು 10ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತಿರುವಾಗ ಈ ವೆಬ್‌ಸೈಟ್ ನ ಬಗ್ಗೆ ಅರಿವಿದ್ದಿದ್ದರೆ ನಮ್ಮ ಕಲಿಕೆ ಇನ್ನು ಸೊಗಸಾಗುತ್ತಿತ್ತು ಎಂದು ಅನ್ನಿಸಿದ್ದುಂಟು. ವೆಬ್‌ಸೈಟ್‌ನ ಉತ್ತಮ ತುಣುಕುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ 'ಗಣಿತ ಸೂತ್ರ' ಪುಸ್ತಕವನ್ನಾಗಿಸಿರುವ ವಿಷಯ ತಿಳಿದು ಸಂತಸವಾಯಿತು. ಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ, ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಭಯ-ಆತಂಕಗಳು ದೂರವಾಗುವ ದಿನಕ್ಕಾಗಿ ಕಾತುರನಾಗಿದ್ದೇನೆ.