

1.8 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆ :

ಕೆಳಗಿನ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಸಮಸ್ಯೆ 1 : ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತನಿಂದ ರೂ 10,000 ಸಾಲ ಪಡೆದಿದ್ದೀರೆಂದು ತಿಳಿಯುವಾ ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ವಲ್ಪವಾಗಿಯೇ ಪ್ರತೀ ದಿನ ವಾಪಾಸು ಕೊಡುತ್ತೀರೆಂದು ಒಪ್ಪಿದ್ದೀರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಆಯ್ಕೆಗಳಿವೆ:

1. ನೀವು ದಿನಕ್ಕೊಂದು ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ವಾಪಾಸು ಕೊಡಲು ಬಯಸುತ್ತೀರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತ ಒಪ್ಪುತ್ತಾನೆಯೆ? ಖಂಡಿತಾ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸಾಲ ತೀರಿಸಲು ಸುಮಾರು 28 ವರ್ಷಗಳು ಬೇಕು. ($\frac{10,000}{365}$).
2. ನೀವು ಪ್ರತೀದಿನ ದಿನದ ಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೀರೆಂದು ಭಾವಿಸುವಾ.(1 ನೇ ದಿನ 1 ರೂ. 2ನೇ ದಿನ 2 ರೂ, 3 ನೇ ದಿನ 3 ರೂ. ಹೀಗೆ) ಆಗ ಸಾಲ ತೀರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ದಿನ ಬೇಕು ?
3. ನೀವು ಮೊದಲ ದಿನ 1 ರೂ. ಕೊಟ್ಟು ಮುಂದಿನ ಪ್ರತೀದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ದಿನ ಕೊಟ್ಟ ಹಣದ ಎರಡರಷ್ಟು ಕೊಡುವಿರಾದರೆ, (1 ನೇ ದಿನ 1 ರೂ. 2 ನೇ ದಿನ 2 ರೂ, 3 ನೇ ದಿನ 4 ರೂ 4 ನೇ ದಿನ 8 ರೂ ಹೀಗೆ) ಸಾಲ ತೀರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ದಿನ ಬೇಕು?

ಕೊನೆಯ ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಲ ತೀರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ದಿನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ?

ಸಮಸ್ಯೆ 2 : ನೀವು ಒಂದು 70 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದ ಸೈಕಲ್ ರೇಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತೀರೆಂದು ಭಾವಿಸುವಾ. ಮೊದಲ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ 16 ಕಿ.ಮೀ ದೂರ ಚಲಿಸುತ್ತೀರಿ. ಮುಂದಿನ ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಯಲ್ಲೂ ನಿಮ್ಮ ವೇಗ ಒಂದೊಂದು ಕಿ.ಮೀ.ನಂತೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದಾದರೆ, ಸ್ಪರ್ಧೆಯ ಅಂತಿಮ ಹಂತವನ್ನು ತಲುಪಲು ನಿಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ಬೇಕು?

ಈ ರೀತಿಯ, ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಹೇಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

A Project of www.eShale.org

18.1 ಶ್ರೇಣಿಗಳು :

1.8.1 ಉದಾ 1 : ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ತರಗತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಹೇಳಿದರೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೀರಿ?
3, 10, 4, 1, 12, 8, 7, 5, 6, 2, 9, 11 - ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೀರಾ?

ಇಲ್ಲ ಬದಲಾಗಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 - ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೀರಿ.

1.8.1 ಉದಾ 2 : 2009 ನೇ ಇಸವಿ ಫೆಬ್ರವರಿ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿರುವ ಆದಿತ್ಯವಾರಗಳ ತಾರೀಖುಗಳನ್ನು
ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ, 1, 8, 15, 22 ಎಂದು ಬರೆಯುವಿರಲ್ಲವೇ?

ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಏನು ಮಾಡಿದಿರಿ ? ನಿಮಗರಿವಿಲ್ಲದೆಯೇ ನೀವೊಂದು ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಬದ್ಧರಾಗಿ,
ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದೀರಿ.

ಮೊದಲನೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, ಒಂದೊಂದೇ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿ,
ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆದಿರಿ. 12 ಆದೊಡನೆ ನಿಲ್ಲಿಸಿದಿರಿ. ಏಕೆ? ಬಹುಷ, ಅದು ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವ
ಕೊನೆಯ ತರಗತಿ.

ಎರಡನೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ 2009 ನೇ ಇಸವಿ ಫೆಬ್ರವರಿ ತಿಂಗಳ ಮೊದಲ ರವಿವಾರ 1ನೇ ತಾರೀಖು. ಆದ್ದರಿಂದ
ಮೊದಲು '1' ನ್ನು ಬರೆದು "ಮುಂಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 7ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ" ಎನ್ನುವ ನಿಯಮಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಮುಂದಿನ
ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರಿ. ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ 29ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಂಡಿರಿ. ಏಕೆಂದರೆ ಫೆಬ್ರವರಿ
ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ 29 ದಿನಗಳಿಗಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

1.8.1 ಉದಾ 3 : ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ 2, 4, 6, 8, 10, 12

ಇದು ಯಾವ ಪಟ್ಟಿ? ಇದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಇದು ಮುಗಿಯುವುದೇ ಇಲ್ಲ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯು ನಿಯಮಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವು **ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದ** ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ, $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 \dots$

ಪದಗಳ ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ	--->	1	2	3	4	---	n	---
ಅನುಕ್ರಮ ಸೂಚಕ ಚಿಹ್ನೆಗಳು	--->	T_1	T_2	T_3	T_4	---	T_n	---

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $\{T_n\}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಎಣಿಸಬಹುದಾದ ಅಥವಾ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯು '**ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ**'.

ಎಣಿಸಲಾಗದ ಅಥವಾ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶ್ರೇಣಿ '**ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ**'.

ಮೇಲಿನ ಮೊದಲ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 12 ಪದಗಳಿವೆ ಮತ್ತು 2ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 4 ಪದಗಳಿವೆ. ಇವೆರಡೂ ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ.

3ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಾದ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದಗಳಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದು ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ.

1.8.1 ಉದಾ 4 : ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಂದಲೂ ಕೂಡಿರಬಹುದು.

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$$

ಇಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯಪದ T_n ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

$$T_1 = \frac{(1+1)}{1}$$

$$T_2 = \frac{(2+1)}{2}$$

$$T_3 = \frac{(3+1)}{3}$$

$$T_4 = \frac{(4+1)}{4}$$

$T_n = \frac{(n+1)}{n}$, ಶ್ರೇಣಿಯ ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದದಿಂದಾಗಿ, ದತ್ತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಯಾವುದೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\text{ಶ್ರೇಣಿಯ 6ನೇ ಪದ } T_6 = \frac{(6+1)}{6} = \frac{7}{6}$$

1.8.1 ಸಮಸ್ಯೆ 1 : $T_n = 2n^2 + 1$, $T_n = 73$ ಆದರೆ n ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.*

$$T_n = 2n^2 + 1 = 73$$

$$2n^2 = 73 - 1 = 72$$

$$2n^2 = 72$$

$$n^2 = 36$$

$$n = \sqrt{36} = \pm 6$$

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ್ದರಿಂದ n , ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಬೇಕು $\therefore n = 6$.

ತಾಳೆ:

$$T_6 = 2 \cdot 6^2 + 1 = 2 \cdot 36 + 1 = 73$$

1.8.2 ಶ್ರೇಣಿಗಳು :

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು S ಅಥವಾ S_n ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಶ್ರೇಣಿಯು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$$

$$S_n - S_{n-1} = (T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n) - (T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-1}) = T_n$$

$$S_n - S_{n-1} = T_n$$

1.8.2 ಸಮಸ್ಯೆ 1 : $T_n = \{(-1)^n\}$ ಆದರೆ, $S_1 = S_3$: $S_2 = S_4$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. *

$$T_n = (-1)^n$$

$$T_1 = (-1)^1 = -1, T_2 = (-1)^2 = 1, T_3 = (-1)^3 = -1, T_4 = (-1)^4 = 1$$

$$S_1 = T_1 = -1$$

$$S_3 = T_1 + T_2 + T_3 = -1 + 1 - 1 = -1$$

$$\therefore S_1 = S_3$$

$$S_2 = T_1 + T_2 = -1 + 1 = 0$$

$$S_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\therefore S_2 = S_4$$

A Project of www.eShale.org

1.8.3 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು:

ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಲ್ಲಿ (1, 2, 3, 4. .), ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 ರಲ್ಲಿ (1, 8, 15, 22), ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 7 ಆಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿಯು **“ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ”**. ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 'd'ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, $T_{n+1} - T_n = d : T_{n-1} + d = T_n$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಪದವು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು ಅದನ್ನು 'a'ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$T_1 = a$$

$$T_2 = a + d$$

$$T_3 = T_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$T_4 = T_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

$$T_n = T_{n-1} + d = a + (n-1)d, d = \frac{T_n - a}{(n-1)}$$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ: $T_n = a + (n-1)d$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ: $\{a, a + d, a + 2d, a + 3d \dots, a + (n-1)d\}$

1.8.3 ಸಮಸ್ಯೆ 1 : $S_n = 5n^2 + 3n$ ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. *

ಪರಿಹಾರ:

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= 5(n-1)^2 + 3(n-1) = 5(n^2 - 2n + 1) + 3n - 3 \\ &= 5n^2 - 10n + 5 + 3n - 3 \\ &= 5n^2 - 7n + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (5n^2 + 3n) - (5n^2 - 7n + 2) \\ &= (5n^2 + 3n) - 5n^2 + 7n - 2 \\ &= 10n - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore T_1 = 8$$

$$\therefore T_2 = 18$$

$$\therefore T_3 = 28$$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ: $\{8, 18, 28, \dots\}$

ತಾಳೆ:

$$S_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 8 + 18 + 28 = 54$$

$$S_n = 5n^2 + 3n$$

$$\begin{aligned} S_3 &= 5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \\ &= 54 \end{aligned}$$

1.8.3 ಸಮಸ್ಯೆ 2 : ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $T_{10} = 20$ $T_{20} = 10$ ಆದರೆ T_{30} ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಮೊದಲು a ಮತ್ತು d ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$T_n = a + (n-1)d$$

$$T_{10} = a + (10-1)d = a + 9d$$

ಆದರೆ, $T_{10} = 20$ (ದತ್ತ)

$$\therefore a + 9d = 20 \therefore a = 20 - 9d \quad \text{====} \rightarrow (1)$$

$$T_{20} = a + (20-1)d = a + 19d \quad \text{====} \rightarrow (2)$$

ಆದರೆ, $T_{20} = 10$ (ದತ್ತ)

$$(1) \text{ ಮತ್ತು } (2) \text{ ರಿಂದ, } T_{20} = a + 19d$$

$$= (20 - 9d) + 19d = 10$$

$$= 20 + 10d = 10$$

$$10d = (10 - 20) = -10$$

$$\therefore d = -1$$

$$(1) \text{ ರಿಂದ, } a = 20 - 9d = 20 - 9(-1)$$

$$= 20 + 9 = 29$$

$$\therefore T_{30} = a + (30-1)d$$

$$= 29 + 29(-1) = 29 - 29 = 0$$

ತಾಳೆ:

$$T_{10} = 29 + 9(-1) = 20$$

$$T_{20} = 29 + 19(-1) = 10$$

1.8.3 ಸಮಸ್ಯೆ 3: 5 ನೇ ಮತ್ತು 10 ನೇ ಪದಗಳ ಅನುಪಾತ 1:2 ಆಗಿದ್ದು, $T_{12} = 36$ ಆಗಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$T_5 : T_{10} = 1:2 \left(\frac{T_5}{T_{10}} = \frac{1}{2} \right) \text{ (ದತ್ತ)}$$

$$\therefore 2T_5 = T_{10}$$

$$2(a+4d) = (a+9d)$$

$$2a+8d = a+9d$$

$$a=d.$$

$$T_{12} = 36 \text{ (ದತ್ತ)}$$

$$a+11d = 36$$

$$a=d \text{ ಆದ್ದರಿಂದ, } 12d = 36$$

$$\therefore d=3$$

$$a=d \text{ ಆದ್ದರಿಂದ, } a=3$$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ: = 3, 6, 9, 12...

ತಾಳೆ:

$$T_5 = 15, T_{10} = 30, 1:2 \text{ ದತ್ತ ಅನುಪಾತ.}$$

1.8.3 ಸಮಸ್ಯೆ 4: ಮೊತ್ತ 15 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 105 ಆಗಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. *

ಪರಿಹಾರ:

ಮಧ್ಯದ(2ನೇ) ಪದ a ಆಗಿರಲಿ.

ಮೊದಲ ಪದ: $a-d$

3^{ನೇ} ಪದ: $a+d$.

ಮೂರು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ = $(a-d)+a+(a+d) = 3a = 15$

$$a = 5.$$

ಮೂರು ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $(a-d)*a*(a+d) = a*(a^2-d^2) = 105$

$$\therefore a*(a^2-d^2) = 105$$

$$5(a^2-d^2) = 105$$

$$\therefore (a^2-d^2) = \frac{105}{5}$$

$$\therefore (25-d^2) = 21$$

$$-d^2 = 21-25$$

$$-d^2 = -4$$

$$d^2 = 4$$

$$\therefore d = \pm 2$$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು: 3, 5, 7 ಅಥವಾ 7, 5, 3

ತಾಳೆ:

3, 5, 7 ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ 15, ಗುಣಲಬ್ಧ: 105.

1.8.4 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ:

ಈಗ ನಾವು ಈ ಪಾಠದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸುವಾ.

1.8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 1 : ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತನಿಂದ ರೂ 10,000 ಸಾಲ ಪಡೆದಿದ್ದೀರೆಂದು ತಿಳಿಯುವಾ ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ವಲ್ಪವಾಗಿಯೇ ಪ್ರತೀ ದಿನ ವಾಪಾಸು ಕೊಡುತ್ತೀರೆಂದು ಒಪ್ಪಿದ್ದೀರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಆಯ್ಕೆಗಳಿವೆ:

1. ನೀವು ದಿನಕ್ಕೊಂದು ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ವಾಪಾಸು ಕೊಡಲು ಬಯಸುತ್ತೀರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತ ಒಪ್ಪುತ್ತಾನೆಯೇ? ಖಂಡಿತಾ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸಾಲ ತೀರಿಸಲು ಸುಮಾರು 28 ವರ್ಷಗಳು ಬೇಕು. ($\frac{10,000}{365}$).
2. ನೀವು ಪ್ರತೀದಿನ ದಿನದ ಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೀರೆಂದು ಭಾವಿಸುವಾ. (1 ನೇ ದಿನ 1 ರೂ. 2ನೇ ದಿನ 2 ರೂ, 3 ನೇ ದಿನ 3 ರೂ. ಹೀಗೆ) ಅಂತ್ಯವಿಲ್ಲದೆ ಕೊಡುತ್ತಾ ಹೋಗಲು ನೀವು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ? ಖಂಡಿತಾ ಬೇಡ - ಏಕೆ ನೋಡುವಾ:

2^{ನೇ} ಆಯ್ಕೆಯಂತೆ ನೀವು 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಹಣ ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ?

10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಒಟ್ಟು ಹಣ = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55 ರೂ.

ಹಾಗಾದರೆ 100 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಹಣ ಎಷ್ಟು? ಕೂಡಿಸಲು ಕಷ್ಟವಲ್ಲವೇ?

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈಗ ಮೊದಲ 'n' ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ ಏನು ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

$$\{T\} = \{1,2,3,\dots,n\}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \text{ (ಪದಗಳಿವೆ)}$$

$$+ S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 \text{ (ತಿರುಗಿಸಿ ಬರೆದಿದೆ)}$$

$$=====$$

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1) \text{ (n ಪದಗಳಿವೆ)}$$

$$= n(n+1)$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ, 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಹಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾ:

$$S_{10} = 10 * \frac{11}{2} = 55 \text{ ರೂ.}$$

$$100 \text{ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡುವ ಒಟ್ಟು ಹಣ: } S_{100} = \frac{100 * 101}{2} = 5050 \text{ ರೂ.}$$

$$200 \text{ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡುವ ಒಟ್ಟು ಹಣ: } S_{200} = \frac{200 * 201}{2} = 20,100 \text{ ರೂ.}$$

10,000 ರೂ.ಗಳನ್ನು ತೀರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ದಿನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ ನಂತರ ನೋಡುವಾ.

$$\text{ಈಗ ಸದ್ಯಕ್ಕೆ: } S_{141} = \frac{141 * 142}{2} = 10,011 \text{ ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಲ ತೀರಿಸಲು 141 ದಿನಗಳು ಸಾಕು.}$$

ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S_n ನ್ನು $\sum n$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$S_n = \sum n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು “ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ” ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು ‘{AP}’ ಯೆಂತಲೂ ಸೂಚಿಸುವರು.

ಉದಾ: {2,5,8}, {1,4,7}, {3,7,11}

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ‘n’ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು:

{AP: ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ } = {a, a+d, a+2d, a+3d ..., a+(n-1)d}

$S_n = [a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) \dots + a + (n-1)d]$

$= [a + a + a \dots (n \text{ ಸಲ}) + d(1+2+3+ \dots (n-1))]$

$= na + d(\sum (n-1))$

$= na + d\left(\frac{(n-1)*(n-1+1)}{2}\right)$ (ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ n ಬದಲು (n-1) ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

$= na + \frac{d(n-1)*(n-1+1)}{2} = \frac{2na + n(n-1)*d}{2} = \frac{n}{2} * (2a + (n-1)*d)$

$= \frac{n}{2} * [a + \{a + (n-1)*d\}] = \frac{n}{2} (a + l) : \{ l = T_n \rightarrow n \text{ ನೇ ಪದ.} \}$

1.8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 2 : 25 ಪದಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದ ಪದ 20 ಆದರೆ ಆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. *

ಪರಿಹಾರ:

ದತ್ತ: $n=25$, $T_{13}=20$, S_{25} ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$T_{13} = a + 12d$$

$$\begin{aligned} S_{25} &= n * \left(\frac{a + T_{25}}{2} \right) = \frac{25 * (a + a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 * 2 * (a + 12d)}{2} \\ &= 25 * (a + 12d) = 25 * 20 (T_{13} = a + 12d) \\ &= 500 \end{aligned}$$

1.8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 3 : 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ 101 ರಿಂದ 201 ರ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿ. ನೇ

ಪರಿಹಾರ:

{AP: ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ } = (104, 108, 112 ... 200}

$$S_n = 104 + 108 + 112 + \dots$$

$$= 104 + (104 + 4) + (104 + 8) \dots (104 + 96) \quad (104, 25 \text{ ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುತ್ತದೆ.})$$

(ಗಮನಿಸಿ: 1 ನೇ ಪದ = 104, ಕೊನೆಯ ಪದ 200 ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸ = 4)

$$= 104 * 25 + 4(1 + 2 + 3 \dots 24)$$

$$= (104 * 25) + 4 * \left(\frac{24 * 25}{2} \right) = 2600 + 1200 = 3800$$

1.8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 4 : ಬಾಹುಬಲಿಯ ಏಕಶಿಲಾ ವಿಗ್ರಹವಿರುವ ಶ್ರವಣ ಬೆಳಗೊಳಕ್ಕೆ ನೀವು ಪ್ರವಾಸ ಹೋಗಿದ್ದೀರೆಂದು ಭಾವಿಸಿ. ನೀವು ಮೊದಲ ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ 23 ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳನ್ನು ಹತ್ತುತ್ತೀರಿ. ನಂತರ ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ನೀವು ಹಿಂದಿನ ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿದ್ದಕ್ಕಿಂತ 2 ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಹತ್ತುತ್ತೀರಿ ಎಂದಾದರೆ, 7 ನಿಮಿಷ ಗಳಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿದ ಒಟ್ಟು ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ನೀವು ಪ್ರತೀ ನಿಮಿಷದಲ್ಲೂ ಹಿಂದಿನ ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿದ್ದಕ್ಕಿಂತ 2 ಮೆಟ್ಟಿಲು ಕಡಿಮೆ ಹತ್ತುವುದರಿಂದ ಅದು ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದೆ. ನೀವು 7 ನಿಮಿಷ ಕಾಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡದ್ದರಿಂದ, ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ S_7 ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು.

{AP: ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ } = {23,21,19....} $a=23$, $d = -2$

$$S_n = n * \left(\frac{2a + (n-1) * d}{2} \right)$$

$$\therefore S_7 = 7 * \left(\frac{2 * 23 + 6 * (-2)}{2} \right)$$

$$= 7 * \left[\frac{(46 - 12)}{2} \right]$$

$$= 7 * 17 = 119$$

ನೀವೇ ಮಾಡಿ:

ನೀವು ಪ್ರತಿಮೆಯನ್ನು ತಲುಪಲು 1000 ಮೆಟ್ಟಿಲು ಹತ್ತಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಕಾಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1.8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 5: ನೀವು ಒಂದು 70ಕಿ.ಮಿ. ದೂರದ ಸೈಕಲ್ ರೇಸ್ ನಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಬೇಕು. ಮೊದಲ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಗಂಟೆಗೆ 16 ಕಿ.ಮಿ. ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತೀರಿ. ಮುಂದೆ ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದೊಂದು ಕಿ.ಮಿ. ನಷ್ಟು ವೇಗ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ಸ್ಪರ್ಧೆ ಮುಗಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಕಾಲ ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ನಿಮ್ಮ ಸೈಕಲಿನ ವೇಗ: (16,15,14, ...) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ,

$S_n = 70$ ಆಗುವಂತೆ n ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ $a = 16, d = -1$

$$S_n = n * \left(\frac{2a + (n-1) * d}{2} \right) = n * \left(\frac{2 * 16 + (n-1) * (-1)}{2} \right) = n * \left(\frac{32 - n + 1}{2} \right) = n * \left(\frac{32 - n + 1}{2} \right)$$

$$= n * \left(\frac{33 - n}{2} \right) = 70 \text{ (ಒಟ್ಟು ದೂರ: 70 ಕಿ.ಮಿ.)}$$

$$(33n - n^2) = 2 * 70 = 140$$

$$-n^2 + 33n - 140 = 0$$

$$n^2 - 33n + 140 = 0$$

$$(n-5) * (n-28) = 0$$

$$n=5 \text{ ಅಥವಾ } n=28$$

ಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ನಾವಿಲ್ಲಿ 2 ಉತ್ತರಗಳನ್ನು (5 ಮತ್ತು 28) ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಆರಂಭದ ವೇಗ ಗಂಟೆಗೆ 16

ಕಿ.ಮಿ. ಆಗಿದ್ದು, ಗಂಟೆಗೆ ಒಂದು ಕಿ.ಮಿ. ವೇಗ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವಾಗ ಬೇಕಾದ ಕಾಲ $5\left(\frac{70}{16}\right)$ ಗಂಟೆಗಿಂತ

ಹೆಚ್ಚಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ($n=28$ ಆದರೆ ವೇಗ ಋಣ ($T_{28} = -11$) ಆಗುತ್ತದೆ).

\therefore ಬೇಕಾದ ಕಾಲ = 5 ಗಂಟೆಗಳು.

1.8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 6: ಒಬ್ಬ ರಾಜನು ಮೊದಲನೆಯ ದಿನ 2 ಯೋಜನ ದೂರ ಹೋಗಿ, ಶತ್ರುವಿನ ಆನೆಗಳನ್ನು ಹಿಡಿಯಲು 7 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ 80 ಯೋಜನಗಳು ಹೋದರೆ, ಪ್ರತೀ ದಿನವೂ ಎಷ್ಟು ದೂರ ಹೆಚ್ಚಿಸಿರಬೇಕು, ಬುದ್ಧಿವಂತನೇ ಹೇಳು? (ಲೀಲಾವತಿ ಶ್ಲೋಕ 126)

ಪರಿಹಾರ:

ರಾಜನು ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ.

$S_n = 70$ ಆಗುವಂತೆ d ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ $a = 2, n = 7$

$$S_n = n * \left(\frac{2a + (n-1) * d}{2} \right) = 7 * \left(\frac{2 * 2 + (7-1) * d}{2} \right) = 7 * \left(\frac{4 + 6d}{2} \right) = 7 * (2 + 3d) = 80$$

$$\therefore 2 + 3d = \frac{80}{7}$$

$$\therefore 3d = \left(\frac{80}{7} \right) - 2 = \frac{66}{7}$$

ರಾಜನು ಪ್ರತೀ ದಿನವೂ $\frac{22}{7}$ ಯೋಜನ ದೂರವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕು.

1.8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 7: ಒಬ್ಬನು ಮೊದಲನೆಯ ದಿನ 3 ಪಲ್ಲ ಧಾನ್ಯವನ್ನು ದಾನ ಮಾಡಿ, ಪ್ರತೀ ದಿನವೂ 2 ಪಲ್ಲಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ 360 ಪಲ್ಲಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ದಾನ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಲೀಲಾವತಿಯೇ ಬೇಗ ಹೇಳು. (ಲೀಲಾವತಿ ಶ್ಲೋಕ 124)

ಪರಿಹಾರ:

ದಾನ ಮಾಡಿದ ಧಾನ್ಯ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ,

$S_n = 360$ ಆಗುವಂತೆ n ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ $a = 3, d = 2$

$$S_n = n * \left(\frac{2a + (n-1) * d}{2} \right)$$

$$= n * \left(\frac{2*3 + (n-1)*2}{2} \right)$$

$$= n * (3n + 2n - 2) = n(n + 2)$$

$$\therefore n^2 + 2n = 360$$

$$\therefore n^2 + 2n - 360 = 0$$

$$\therefore (n + 20) * (n - 18) = 0$$

$n = -20$ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. 360 ಪಲ್ಲ ದಾನ ಮಾಡಲು 18 ದಿನಗಳು ಬೇಕು.

1.8.5 ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ:

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

1. $\{T\} = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದವೂ ಹಿಂದಿನ ಪದದ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಪದ = $2 \times$ ಹಿಂದಿನ ಪದ ಅಥವಾ = $\frac{1}{2} \times$ ಮುಂದಿನ ಪದ: ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ಅನುಪಾತ = 1:2.

2. $\{T\} = \{27, 9, 3, 1, \dots\}$. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದವೂ ಹಿಂದಿನ ಪದದ $\frac{1}{3}$ ರಷ್ಟಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಪದ = $\frac{1}{3} \times$ ಹಿಂದಿನ ಪದ ಅಥವಾ ಹಿಂದಿನ ಪದ = $3 \times$ ಮುಂದಿನ ಪದ,
ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ಅನುಪಾತ = 3:1

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಶ್ರೇಣಿಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪದ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಗಳ ಅನುಪಾತ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು “ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ” ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅದನ್ನು ‘{GP}’ ಯೆಂತಲೂ ಸೂಚಿಸುವರು. ಈ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ‘ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ’ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ‘r’ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $\frac{T_n}{T_{n-1}} =$ ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

1 ನೇ ಉದಾ. ದಲ್ಲಿ $\frac{T_3}{T_2} = \frac{8}{4} = 2$. 2 ನೇ ಉದಾ. ದಲ್ಲಿ $\frac{T_3}{T_2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದ $T_1 = a$, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ‘r’ ಆದರೆ,

$$T_2 = T_1 \cdot r = ar^{(2-1)}$$

$$T_3 = T_2 \cdot r = ar \cdot r = ar^2 = ar^{(3-1)}$$

$$\text{ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, } T_n = ar^{(n-1)}; T_n = T_{n-1} \cdot r$$

ಯಾವುದೇ ಪದಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಮುಂದಿನ ಪದ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ: $\{a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{(n-1)}\}$.

1.8.5 ಸಮಸ್ಯೆ 1 : ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 7^{ನೇ} ಪದವು 4^{ನೇ} ಪದದ ಎಂಟರಷ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು 5^{ನೇ} ಪದ 12 ಆದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$T_n = ar^{n-1}$$
$$\therefore T_7 = ar^6, T_4 = ar^3 \text{ ಆದರೆ } T_7 = 8T_4 \rightarrow (\text{ದತ್ತ})$$

$$\therefore ar^6 = 8 ar^3$$

$$\therefore r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2$$

$$T_5 = a r^4$$
$$= a 2^4 = 16a = 12 \text{ (ದತ್ತ)}$$

$$\therefore a = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ದತ್ತ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{3}{4} * 2, \frac{3}{4} * 2^2, \frac{3}{4} * 2^3, \dots \right\} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 6, \dots \right\}$$

A Project of www.eShale.org

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು:

$$= \{a, ar, ar^2, ar^3 \dots \dots \dots ar^{(n-1)}\} \text{ (n ಪದಗಳು)}$$

$$(1) \quad S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 \dots \dots \dots + ar^{(n-1)}$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 'r' ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$(2) \quad rS_n = ar + ar^2 + ar^3 \dots \dots \dots + ar^{(n-1)} + ar^n$$

ಸ.(1) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$$S_n - rS_n = a - ar^n \quad \therefore S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = a \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right) \quad \text{-----} \rightarrow r < 1 \text{ ಆದಾಗ,}$$

$$= -a \left(\frac{1-r^n}{-(1-r)} \right) \text{ (ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡನ್ನೂ -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ)}$$

$$= a \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) \quad \text{-----} \rightarrow r > 1 \text{ ಆದಾಗ,}$$

A Project of www.eShale.org

$$S_n = a \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right)$$

r ಗೆ ಯಾವುದೆಲ್ಲಾ ಬೆಲೆ ಇರಬಹುದು? (r=1, r>1, r<1)

1) r=1 ಆದಾಗ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ = {a, a, a, a, a, ...}

2) r<1 ಆದಾಗ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, r = $\frac{9}{10} = 0.9$), ಮತ್ತು n ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ:

$r^2 =$	0.81
$r^4 =$	0.66
$r^8 =$	0.43
$r^{16} =$	0.19
$r^{64} =$	0.0012

ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ, n ನ ಬೆಲೆ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ, r^n ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ.

r<1 ಆದಾಗ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನಂತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$S_n = a \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right) \implies S_{\text{ಅನಂತ}} = \frac{a(1-0)}{(1-r)} = \frac{a}{(1-r)}$$

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $\frac{S_{2n}}{S_n} = r^n + 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \left[a \frac{1-r^{2n}}{1-r} \right] \div \left[a \frac{1-r^n}{1-r} \right]$$

$$= \frac{1-r^{2n}}{1-r^n}$$

$$= \frac{(1-r^n) * (1+r^n)}{1-r^n} \implies (a^2 - b^2) = (a-b) * (a+b), r^{2n} = (r^n)^2$$

$$= (1 + r^n)$$

A Project of www.eShale.org

1.8.5 ಸಮಸ್ಯೆ 2 : ಈ ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿ: { 1,0.1,0.01,0.001,... (0.1)ⁿ}
(ಗಮನಿಸಿ: ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 9 ಪದಗಳಲ್ಲ. 10 ಪದಗಳಿವೆ.)

ಪರಿಹಾರ:

$$a=1, r=\frac{1}{10}$$

$$S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\therefore S_{10} = 1(1 - (\frac{1}{10})^{10}) \div (1 - \frac{1}{10})$$

$$= \frac{10^{10} - 1}{10^{10}} \div (\frac{9}{10})$$

$$= \frac{10^{10} - 1}{9 \cdot 10^9}$$

A Project of www.eShale.org

1.8.5 ಸಮಸ್ಯೆ 3 : $S_{10} : S_5 = 33 : 1$, $T_6 = 32$ ಆದರೆ ಆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$\text{GP ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ } \frac{S_{10}}{S_5} = \left[a \left(\frac{r^{10} - 1}{r - 1} \right) \right] \div \left[a \left(\frac{r^5 - 1}{r - 1} \right) \right]$$

$$= (r^{10} - 1) / (r^5 - 1)$$

$$= (r^5 + 1) \implies \text{ಗಮನಿಸಿ: } \{ (a^2 - b^2) = (a - b) * (a + b) \text{ ಮತ್ತು } r^{10} = (r^5)^2 \}$$

$$\text{ಆದರೆ } \frac{S_{10}}{S_5} = 33 \text{ (ದತ್ತ).}$$

$$\therefore (r^5 + 1) = 33$$

$$\therefore r^5 = 33 - 1 = 32 \quad \therefore r = 2$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$T_6 = a2^5$$

$$= 32 \text{ (ದತ್ತ)}$$

$$\therefore a = 1$$

$$\{\text{ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ}\} = (1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$$

1.8.5 ಸಮಸ್ಯೆ 4 : ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬವನ್ನು ಕೆಲವು ಶಾಲೆಗಳ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಸಿಹಿತಿಂಡಿ ಹಂಚುವ ಮೂಲಕ ಆಚರಿಸಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತೀರಿ. ಹೀಗೆ ಹಂಚುವಾಗ, 1 ಪ್ಯಾಕೇಟ್ ನಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಶಾಲೆಗೂ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಶಾಲೆಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ಯಾಕೇಟುಗಳ, 4 ರಷ್ಟು ಪ್ಯಾಕೇಟುಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೀರಿ. ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ 341 ಸಿಹಿತಿಂಡಿ ಪ್ಯಾಕೇಟುಗಳಿದ್ದರೆ, ಎಷ್ಟು ಶಾಲೆಗಳಿಗೆ ನೀವು ಸಿಹಿತಿಂಡಿ ಕೊಡಬಹುದು?

ಪರಿಹಾರ:

ಶಾಲೆಗಳಿಗೆ ಹಂಚಿದ ಸಿಹಿ ತಿಂಡಿ ಪ್ಯಾಕೇಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದೆ.

= {1,4,16,...} ಆಗ, $a=1$, $r=4$. $S_n = 341$ $n=?$

$$r > 1 \therefore S_n = a \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right)$$

$$\therefore S_n = a \left(\frac{4^n - 1}{4 - 1} \right)$$

$$= 1 \left(\frac{4^n - 1}{3} \right)$$

$$= 341 \text{ (ದತ್ತ)}$$

$$\therefore (4^n - 1) = 3S_n = 3 * 341 = 1023$$

$$4^n = 1024$$

$$\therefore n = 5$$

ನೀವು 5 ಶಾಲೆಗಳಿಗೆ ಸಿಹಿ ತಿಂಡಿ ಹಂಚಬಹುದು

1.8.5 ಸಮಸ್ಯೆ 5: ಒಬ್ಬನು ಮೊದಲನೆಯ ದಿನ 2 ವರಾಟಕ(ಹಣದ ಮಾನ) ದಾನ ಮಾಡಿ, ಪ್ರತೀ ದಿನವೂ ಹಿಂದಿನ ದಿನ ಕೊಟ್ಟದ್ದರ ಎರಡರಷ್ಟು ಕೊಡುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, ಒಂದು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ದಾನ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಲೀಲಾವತಿಯೇ ಬೇಗ ಹೇಳು. (ಲೀಲಾವತಿ ಶ್ಲೋಕ 130)

ಪರಿಹಾರ:

ದಾನ ಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದೆ.

= {2, 4, 8, 16,} ಆಗ, $a=2, r=2, n=30$

$$\therefore S_n = a \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right)$$

$$\therefore S_n = 2 \left(\frac{2^{30} - 1}{2 - 1} \right)$$

$$= 2(1024^3 - 1) \quad (\because 2^{30} = \{2^{10}\}^3 = 1024^3)$$

$$= 2147483646$$

A Project of www.eShale.org

1.8.6 ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿ:

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

$$\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \dots \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{18}, \frac{1}{28}, \dots \right\}$$

ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಪದಗಳ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಬರೆದಾಗ,

{ 3, 6, 9, 12...} ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ (ಸಮಸ್ಯೆ 1.8.3.3)

{ 8, 18, 28...} ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ (ಸಮಸ್ಯೆ 1.8.3.1)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು 'ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿ' ಎನ್ನುವರು. ಅದನ್ನು '{HP}' ಯೆಂತಲೂ ಸೂಚಿಸುವರು.

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ {AP} ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ $T_n = a + (n-1)d$

\therefore {HP ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿ} ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ $= \frac{1}{a + (n-1)d}$

$$\{ \text{HP ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿ} \} = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \dots, \frac{1}{a+(n-1)d} \right\}$$

ಗಮನಿಸಿ: ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S_n ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಯಾವುದೇ ಸೂತ್ರ ಇಲ್ಲ.

1.8.6 ಸಮಸ್ಯೆ 1 : ಒಂದು ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $T_4 = \frac{1}{12}$, $T_{10} = \frac{1}{42}$ ಆದರೆ T_{19} ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$\text{ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ } T_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$$

$$\therefore T_4 = \frac{1}{a+(4-1)d} = \frac{1}{12} \text{ (ದತ್ತ)}$$

$$\therefore T_4 = \frac{1}{a+3d} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore a+3d = 12 \text{ =====} \rightarrow (1)$$

$$T_{10} = \frac{1}{a+(10-1)d} = \frac{1}{42} \text{ (ದತ್ತ)}$$

$$\therefore a+9d = 42 \text{ =====} \rightarrow (2)$$

(1) ನ್ನು (2) ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ,

$$a+9d-(a+3d) = 42-12$$

$$\therefore 6d = 30$$

$$\therefore d = 5$$

1 ರಲ್ಲಿ d ಯ ಬೆಲೆ 5 ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ,

$$a+3*5 = 12$$

$$a = (12-15) = -3$$

$$T_{19} = \frac{1}{-3+(19-1)5}$$

$$= \frac{1}{-3+90}$$

$$= \frac{1}{87}$$

A Project of www.eShale.org

1.8.7 ಸಮಾಂತರ, ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಹರಾತ್ಮಕ ಮಾಧ್ಯಗಳು:

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: a, A ಮತ್ತು b ಗಳು 'ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ' ಮೂರು ಪದಗಳಾದರೆ, a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಮಾಂತರ ಮಾಧ್ಯ 'A' ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

a, A ಮತ್ತು b ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು.

$$A - a = b - A \text{ (ಸ್ಥಿರ ಅಥವಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)}$$

$$2A = a + b$$

$$A = \frac{a + b}{2}$$

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: a, G ಮತ್ತು b ಗಳು 'ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ' ಮೂರು ಪದಗಳಾದರೆ, a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಾಧ್ಯ 'G' ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

a, G ಮತ್ತು b ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು.

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \text{ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ)}$$

$$G^2 = ab$$

$$G = \sqrt{ab}$$

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: a, H ಮತ್ತು b ಗಳು 'ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿಯ' ಮೂರು ಪದಗಳಾದರೆ, a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವಿನ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಾಧ್ಯ 'H' ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

a, H, b → ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳಾದರೆ,

$(\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b})$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿರಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H}$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)

$$\begin{aligned}\frac{2}{H} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ &= \frac{(a+b)}{ab}\end{aligned}$$

$$\therefore 2ab = H(a+b)$$

$$\therefore H = \frac{2ab}{(a+b)}$$

A Project of www.eShale.org

1.8.7 ಪ್ರಮೇಯ: A, G ಮತ್ತು H ಗಳು ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಮಾಂತರ ಮಾಧ್ಯ (AM) ಗುಣೋತ್ತರ ಮಾಧ್ಯ (GM) ಮತ್ತು ಹರಾತ್ಮಕ ಮಾಧ್ಯ (HM)ಗಳಾದರೆ, A, G ಮತ್ತು H ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ್ದು: $\frac{G}{A} = \frac{H}{G}$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ)

ಈಗ, (AM) $A = \frac{(a+b)}{2}$ (GM) $G = \sqrt{ab}$

(HM) $H = \frac{2ab}{(a+b)}$

$A*H = \frac{(a+b)}{2} * \frac{2ab}{(a+b)} = ab = (\sqrt{ab})^2 = G^2$

ಅಥವಾ $\frac{H}{G} = \frac{G}{A}$ ಆದ್ದರಿಂದ, A, G, H ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಗಮನಿಸಿ:

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ, $A \geq G \geq H$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. $(a+b)^2$ ನ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿ