# 3.3 ಗಣಗಳು – ಭಾಗ:2:

## 3.3.1 ಗಣಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳು:

2+3 =3+2 , 2*3 =3*2.
ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಪರಿವರ್ತನೀಯ.

(2+3)+4= 2+(3+4) ; (2*3)*4= 2*(3*4).
ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿವೆ.

ಈಗ ನಾವು ಗಣಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವಾ.

**3.3.1 ಉದಾಹರಣೆ 1 :** ಗಣಗಳು: A = {p,q,r,} ,B = {q,r,s,} ಮತ್ತು C={r,s,t} ಆದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ:

1. $B \cup C = C \cup B$
2. $B \cap C = C \cap B$
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

## ಪರಿಹಾರ:

B∪C = {q,r,s}∪{r,s,t} = {q,r,s,t} ------→(1)
C∪B = {r,s,t} ∪{q,r,s} ={q,r,s,t} -------→(2)
(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, B∪C =C∪B

1. ∴ ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

B∩C = {q,r,s}∩{r,s,t} = {r,s} -----→(3)
C∩B = {r,s,t}∩ {q,r,s} = {r,s} -----→(4)
(3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, B∩C = C∩B

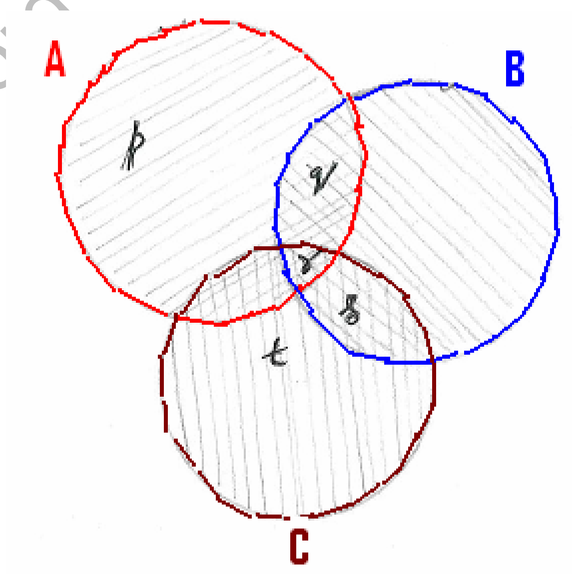
2. ∴ ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

A∪B = {p,q,r,}∪{q,r,s} = {p,q,r,s}
∴ A∪(B∪C) = {p,q,r} ∪{q,r,s,t} ={p,q,r,s,t,} ---→(5)
(A∪B)∪C= {p,q,r.s}∪{r,s,t} = {p,q,r,s,t} ---------→(6)
(5) ಮತ್ತು (6) ರಿಂದ, A∪(B∪C) = (A∪B)∪C

3. ∴ ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

A∩B = {p,q,r}∩{q,r,s} = {q,r}
A ∩(B∩C) ={p,q,r}∩{r,s} ={r} ------→(7)
(A∩B) ∩C = {q,r}∩{r,s,t} = {r} ------→(8)
(7) ಮತ್ತು (8) ರಿಂದ, A∩(B∩C) = (A∩B) ∩C

4. ∴ ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.:



$A \cup (B\cap C) = \{p,q,r\}\cup\{r,s\} = \{p,q,r,s\}$ ----------------→(9)

$A\cup C = \{p,q,r\}\cup\{r,s,t\} = \{p,q,r,s,t\}$

$(A\cup B) \cap (A\cup C) = \{p,q,r,s\}\cap\{p,q,r,s,t\} = \{p,q,r,s\}$ ----→(10)

(9) ಮತ್ತು (10) ರಿಂದ, $A \cup (B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$

**5. ∴ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಛೇದನದ ಮೇಲೆ ವಿಭಾಜಕತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.**

$A\cap (B\cup C) = \{p,q,r,\}\cap\{q,r,s,t\} = \{q,r\}$ ----→(11)

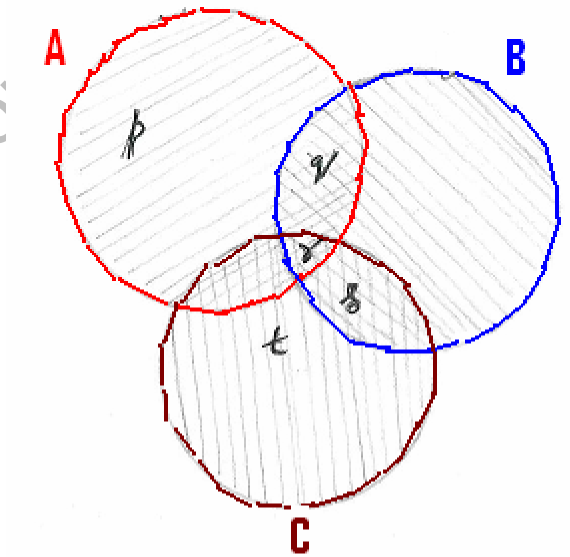
$(A\cap B) = \{p,q,r\}\cap\{q,r,s\} = \{q,r\}$

$(A\cap C) = \{p,q,r\}\cap\{r,s,t\} = \{r\}$

$(A\cap B)\cup(A\cap C) = \{q,r\}\cup\{r\} = \{q,r\}$ --------→(12)

(11) ಮತ್ತು (12) ರಿಂದ, $A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

**6. ∴ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಸಂಯೋಗದ ಮೇಲೆ ವಿಭಾಜಕತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.**






## ಡಿ' ಮಾರ್ಗನ್ನನ ನಿಯಮಗಳು:

ಸಾಧಿಸಿ:

1. $(A\cup B)^1 = A^1\cap B^1$

(ಎರಡು ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ ಗಣದ ಪೂರಕಗಣವು ಆ ಎರಡು ಗಣಗಳ ಪೂರಕ ಗಣಗಳ ಛೇದನಕ್ಕೆ ಸಮ)

2. $(A\cap B)^1 = A^1\cup B^1$

(ಎರಡು ಗಣಗಳ ಛೇದನ ಗಣದ ಪೂರಕ ಗಣವು ಆ ಎರಡು ಗಣಗಳ ಪೂರಕ ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗಕ್ಕೆ ಸಮ)

**3.3.1 ಉದಾಹರಣೆ 2 :** U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} -- (10 ಕ್ಕಿಂತ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

A = {x:10 ಕ್ಕಿಂತ ಕೆಳಗಿನ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ} B = {x:10 ಕ್ಕಿಂತ ಕೆಳಗಿನ 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು}

A = {1,4,9} B = {3,6,9}

$A^1$ = U-A (Aಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ U ದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ)

= {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} - {1,4,9} = {0,2,3,5,6,7,8} =====→(1)

$B^1$ = U-B (B ಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ U ದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ)

= {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} - {3,6,9} = {0,1,2,4,5,7,8} ======→(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$A^1 \cap B^1$ = {0,2,3,5,6.7,8} ∩ {0,1,2,4,5,7,8} = {0,2,5,7,8} =====→(3)

(A∪B) = {1,4,9} ∪ {3,6,9} = {1,3,4,6,9} ∴ $(A \cup B)^1$ = U -(A∪B)

= {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} - {1,3,4,6,9} = {0,2,5,7,8} =====→ (4)

(3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ,

**1. $(A \cup B)^1 = A^1 \cap B^1$**

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$A^1 \cup B^1$ = {0,2,3,5,6,7,8} ∪ {0,1,2,4,5,7,8}

= {0,1,2,3,4,5,6,7,8} ==========→ (5)

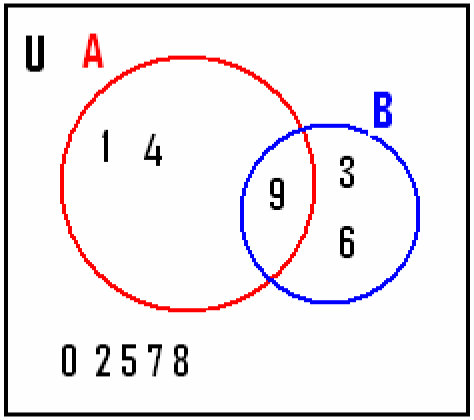
A∩B = {1,4,9} ∩ {3,6,9} = {9}

$(A \cap B)^1$ = U–(A∩B) = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} - {9}

= {0,1,2,3,4,5,6,7,8} ============→(6)

(5) ಮತ್ತು (6)ರಿಂದ,

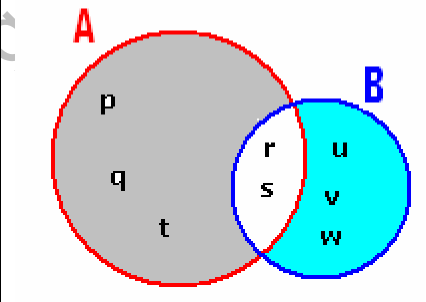
**2. $(A \cap B)^1 = A^1 \cup B^1$**



### 3.3.2 ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

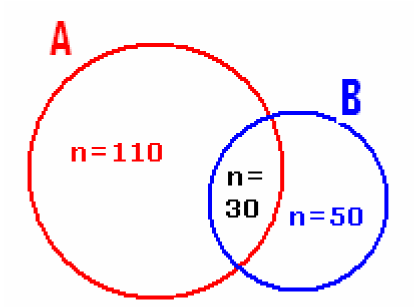
A ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು n(A) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

**3.3.2 ಉದಾಹರಣೆ 1 :** A= {p,q,r,s,t} ಮತ್ತು B= {r,s,u,v,w} ಆಗಿರಲಿ.

| | |
|---|---|
| $n(A) = n(B) = 5$<br>$A \cup B = \{p,q,r,s,t\} \cup \{r,s,u,v,w\} = \{p,q,r,s,t,u,v,w\}$<br>$A \cap B = \{p,q,r,s,t\} \cap \{r,s,u,v,w\} = (r,s)$ $\therefore$ $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cap B) = 2$<br>$n(A) + n(B) = 5+5 = 8+2 = n(A \cup B) + n(A \cap B)$<br>ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಇನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:<br>1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ : $8 = 5+5-2$<br>2. $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ : $2 = 5+5-8$<br>3. A ಮತ್ತು B ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳಾದರೆ,<br>$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ $(\because A \cap B = \{\ \} = \Phi$ $\therefore$ $n(A \cap B) = 0)$ | <br> |

**3.3.2 ಸಮಸ್ಯೆ 1:** ಒಬ್ಬ ಹೂಮಾರುವವನ ಬಳಿ ಕೆಲವು ಹಾರಗಳಿವೆ. 110 ಹಾರಗಳು ಸಂಪಿಗೆ ಹೂವುಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ, 50 ಹಾರಗಳು ಮಲ್ಲಿಗೆ ಹೂವುಗಳಿದ ಕೂಡಿವೆ. ಮತ್ತು 30 ಹಾರಗಳು ಎರಡೂ ಬಗೆಯ ಹೂವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನ ಬಳಿ ಇರುವ ಹಾರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:**

| | |
|---|---|
| A ಯು ಸಂಪಿಗೆ ಹೂಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಹಾರಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. $n(A) = 110$.<br>B ಯು ಮಲ್ಲಿಗೆ ಹೂಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಹಾರಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. $n(B) = 50$.<br>$A \cap B$ ಯು ಎರಡೂ ಬಗೆಯ ಹೂಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಹಾರಗಳ ಗಣ.<br>$n(A \cap B) = 30$.<br>$A \cup B$ ಯು ಎಲ್ಲಾ ಹಾರಗಳ ಗಣ.<br>$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 110 + 50 - 30 = 130$<br>$\therefore$ ಹೂಮಾರುವವನ ಬಳಿ 130 ಹಾರಗಳಿವೆ. | <br> |

**3.3.2 ಸಮಸ್ಯೆ 2:** ಒಂದು ತರಗತಿಯ 60 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಕಬಡ್ಡಿ ಅಥವಾ ಹಾಕಿ ಟೀಂ ನಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಟೀಂ ನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಕೊಳ್ಳ ಬೇಕು. 45 ಮಂದಿ ಕಬಡ್ಡಿ ಟೀಂ ಸೇರಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು 30 ಮಂದಿ ಹಾಕಿ ಟೀಂ ಸೇರಿದ್ದಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಎರಡೂ ಟೀಂಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:**

A ಯು ಕಬಡ್ಡಿ ಟೀಂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. $n(A) = 45$

B ಯು ಹಾಕಿ ಟೀಂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. $n(B) = 30$

$A \cap B$ ಯು ಎರಡೂ ಟೀಂಗಳಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ.

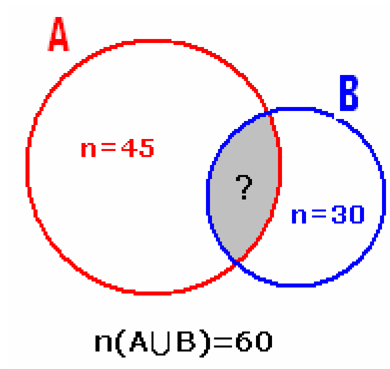
$A \cup B$ ಯು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ.

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದದ್ದು: $n(A \cap B)$.

$n(A \cup B) = 60$ (ದತ್ತ), $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\therefore\ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 45 + 30 - 60 = 15$ $\therefore$ 15 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎರಡೂ ಟೀಂಗಳಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಇದ್ದಾರೆ.



**3.3.2 ಸಮಸ್ಯೆ 3 :**ಒಂದು ಸಾವಿರ ಕುಟುಂಬಗಳನ್ನು ಸಂದರ್ಶಿಸಲಾಗಿ, 750 ಕುಟುಂಬಗಳು ವಾರ್ತಾಚಾನೆಲ್ ನ್ನೂ 400 ಕುಟುಂಬಗಳು ಕ್ರೀಡಾ ಚಾನೆಲ್‌ನ್ನೂ ಮತ್ತು 300 ಕುಟುಂಬಗಳು ಎರಡೂ ಚಾನೆಲ್‌ಗಳನ್ನೂ ವೀಕ್ಷಿಸುವುದು ಕಂಡುಬಂತು.ಹಾಗಾದರೆ.

1. ಎಷ್ಟು ಕುಟುಂಬಗಳು ವಾರ್ತಾಚಾನೆಲ್ ಮಾತ್ರ ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾರೆ?
2. ಎಷ್ಟು ಕುಟುಂಬಗಳು ಕ್ರೀಡಾ ಚಾನೆಲ್ ಮಾತ್ರ ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾರೆ?
3. ಎಷ್ಟು ಕುಟುಂಬಗಳು ಟಿಲಿವಿಷನ್ ವೀಕ್ಷಿಸುವುದಿಲ್ಲ?

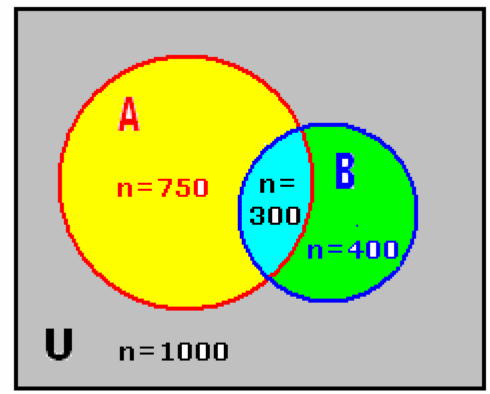
**ಪರಿಹಾರ:**

ಸಂದರ್ಶಿಸಿದ ಕುಟುಂಬಗಳ ಗಣ: U ಆಗಿರಲಿ. $\therefore$ n (U) =1000

ವಾರ್ತಾಚಾನೆಲ್ ನೋಡುವವರ ಕುಟುಂಬಗಳ ಗಣ A ಆಗಿರಲಿ. $\therefore$ n (A) =750

ಕ್ರೀಡಾ ಚಾನೆಲ್ ನೋಡುವವರ ಕುಟುಂಬಗಳ ಗಣ B ಆಗಿರಲಿ. $\therefore$ n(B)=400

ಎರಡೂ ಚಾನೆಲ್ ನೋಡುವವರ ಕುಟುಂಬಗಳ ಗಣ $A\cap B$ $\therefore$ $n(A\cap B)=300$




**ಗಮನಿಸಿ:**

1. $A-A\cap B$ ವಾರ್ತಾಚಾನೆಲ್ ಮಾತ್ರ ನೋಡುವವರ ಗಣ. ಅಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = n [$A-A\cap B$].
2. $B-A\cap B$ ಕ್ರೀಡಾ ಚಾನೆಲ್ ಮಾತ್ರ ನೋಡುವವರ ಗಣ. ಅಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = n [$B-A\cap B$].
3. $A\cup B$ ಯು ಟಿಲಿವಿಷನ್ ನೋಡುವವರ ಗಣ.

$n(A\cup B)= n(A)+n(B)-n(A\cap B) = 750+400-300 = 850$

4. $(A\cup B)^1$ ಟೆಲಿವಿಷನ್ನನ ನೋಡದೇ ಇರುವವರ ಗಣ. ಅಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(A\cup B)^1$ ಈಗ,

1. $n\,[A-A\cap B] = n(A) - n(A\cap B) = 750 - 300 = 450$
2. $n\,[B-A\cap B] = n(B) - n(A\cap B) = 400 - 300 = 100$
3. $n(A\cup B)^1 = n[U - (A\cup B)] = n(U) - n((A\cup B)) = 1{,}000-850 = 150$