

3.7 ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಗಣಿತ:

3.7.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಜೂನ್ 2009 ರ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಗಮನಿಸಿ.

1ನೇ ತಾರೀಖು ಸೋಮವಾರ ಬಂದಿದೆ.ಹಾಗಾದರೆ 29ನೇ ತಾರೀಖು ಯಾವ ವಾರ?ಅದು ಪುನಃ ಸೋಮವಾರ. ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು? 1 ನೇ ತಾರೀಖು ಸೋಮವಾರವಾದರೆ ಮುಂದಿನ ಸೋಮವಾರಗಳ ತಾರೀಖು:

$$1, 8 (1+7), 15 (8+7), 22 (15+7), 29 (22+7)$$

ಇದು ಹೇಗೆ? ಏಕೆಂದರೆ ವಾರದಲ್ಲಿ 7 ದಿನಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ದಿನವು ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ 7ನೇ ದಿನ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಗಣಿತ.

Date:

June, 2009						
Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

$8 \equiv 1$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7) ಇದರ ಅರ್ಥ: $(8-1)$ ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಸರಿಯಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಹುದು.

$15 \equiv 1$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7) ಇದರ ಅರ್ಥ: $(15-1)$ ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಸರಿಯಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಹುದು.

$22 \equiv 1$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ 7) ಇದರ ಅರ್ಥ: $(22-1)$ ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಸರಿಯಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $x \equiv y$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ m) ಆದರೆ, $(x-y)$ ನ್ನು m ನಿಂದ ಸರಿಯಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಹುದು.

ಈ ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು: $x-y \equiv 0$ (ಮಾಡ್ಯುಲೋ m) \equiv ಇದನ್ನು 'ಸರ್ವಸಮ' ಎಂದು

ಓದುತ್ತೇವೆ. ಸರ್ವ ಸಮ ಆದಾಗ $\frac{(x-y)}{m} =$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

ಈಗ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ(m)ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷವು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದು $\{0,1,2,3,4,\dots,(m-1)\}$ ಗಣದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$0,1,2,\dots,(m-1)$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 'ಮಾಡ್ಯುಲೋ m ' ನ ಶೇಷಗಳೆನ್ನುವರು. $Z_m = \{0,1,2,3,4,\dots,(m-1)\}$ ಇದನ್ನು 'ಮಾಡ್ಯುಲೋ m ' ನ ಗಣ ಎನ್ನುವರು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 'm' ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷಗಳ ಗಣವನ್ನು 'm ನ ಅವಶೇಷಗಳ ಗಣ' ಎನ್ನುವರು.

$$Z_m = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, (m-1)\}$$

3.7.1 ಉದಾ 1: ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೊಂದನ್ನು 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಬರೆ.

ಪರಿಹಾರ:

10 ಭಾಜಕವಾದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷಗಳು: 0, 1, 2, 3, ..., 9

$$Z_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ:

m ಒಂದು ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಆದರೆ.

ಸಂಕಲನದ ಸಂಕೇತ \oplus m

ಗುಣಾಕಾರದ ಸಂಕೇತ \otimes m

1. $a \oplus_m b \equiv r \left(= \frac{a+b}{m} \text{ ನ ಶೇಷ} \right)$
2. $a \otimes_m b \equiv r \left(= \frac{a*b}{m} \text{ ನ ಶೇಷ} \right)$

3.7.1 ಉದಾ 2 : $10 \oplus_{12} 2 \oplus_{12} 3$ ರ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$\begin{aligned} & 10 \oplus_{12} 2 \oplus_{12} 3 \\ &= (10 \oplus_{12} 2) \oplus_{12} 3 \\ &= (0) \oplus_{12} 3 \left(\because \frac{10+2}{12} = \text{ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ} \right) \\ &= 3 \left(\because \frac{3}{12} \text{ ರಲ್ಲಿ ಶೇಷ } 3 \right) \end{aligned}$$

3.7.1 ಉದಾ 3 : $4 \otimes_{11} 3 \otimes_{11} 7$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$\begin{aligned} & 4 \otimes_{11} 3 \otimes_{11} 7 \\ &= (4 \otimes_{11} 3) \otimes_{11} 7 \\ &= (1) \otimes_{11} 7 \left(\because \frac{4*3}{11} \text{ ರಲ್ಲಿ ಶೇಷ } = 1 \right) \\ &= 7 \left(\because \frac{1*7}{11} \text{ ರಲ್ಲಿ ಶೇಷ } = 7 \right) \end{aligned}$$

A Project of www.eShale.org

3.7.1 ಉದಾ 4 : $y \otimes y \equiv 1$ (ಮಾಡ್ 8) ಆದರೆ y ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$y \otimes y \equiv 1 \pmod{8}$$

$(y \otimes y)$ ಯನ್ನು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ = 1 ಆಗಬೇಕು.

$$\therefore (y^2 - 1) = 8$$

$$y = 3$$

ತಾಳೆ:

$$3 \otimes_8 3 = 1 \left(\because \left(\frac{3 \cdot 3}{8} \right) \text{ ರಲ್ಲಿ ಶೇಷ} = 1 \right)$$

$$y = 3, 9, 27$$

A Project of www.eShale.org

3.7.2 ಕೇಲಿ ಕೋಷ್ಟಕ:

ಕೇಲಿ ಕೋಷ್ಟಕವು ಮಾಡ್ಯಲೋ ಗಣಿತ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ ಗಣದಲ್ಲಿ ಮಾಡ್ಯಲೋ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾದ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ, ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ತಃಖ್ತೆಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದಾಗ, ಕೇಲಿ ಕೋಷ್ಟಕ ದೊರೆಯುವುದು.

ಕೇಲಿ ಕೋಷ್ಟಕ ದೊರೆಯುವ ಗಣ = $Z_4 = \{0,1,2,3\}$

ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಕೇಲಿ ಕೋಷ್ಟಕ: $(a \oplus b)$ (ಮಾಡ್ 4) ರ ಶೇಷಗಳು 0,1,2 ಅಥವಾ 3 ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯ $a \oplus_4 b$ ಯನ್ನು $a = 0,1,2,3$ ಮತ್ತು $b = 0,1,2,3$. ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾ

ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಒಂದು ತಃಖ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ: $[a \oplus b \text{ ಮಾಡ್ } 4]$ ಕ್ರಿಯೆಗೆ. $(+4)$

$$\begin{array}{cccc}
 0 \oplus_4 0 \equiv 0 & 0 \oplus_4 1 \equiv 1 & 0 \oplus_4 2 \equiv 2 & 0 \oplus_4 3 \equiv 3 \\
 1 \oplus_4 0 \equiv 1 & 1 \oplus_4 1 \equiv 2 & 1 \oplus_4 2 \equiv 3 & 1 \oplus_4 3 \equiv 0 \\
 2 \oplus_4 0 \equiv 2 & 2 \oplus_4 1 \equiv 3 & 2 \oplus_4 2 \equiv 0 & 2 \oplus_4 3 \equiv 1 \\
 3 \oplus_4 0 \equiv 3 & 3 \oplus_4 1 \equiv 0 & 3 \oplus_4 2 \equiv 1 & 3 \oplus_4 3 \equiv 2
 \end{array}$$

b →	0	1	2	3
a ↓	$a \oplus_4 b =$			
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ಗಮನಿಸಿ: ತಃಖ್ತೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿವೆ.

ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಕೇಲಿ ಕೋಷ್ಟಕ : $(a \otimes b)$ (ಮಾಡ್ 4).
 $a \otimes_4 b$ ಯನ್ನು $a = 0, 1, 2, 3$ ಮತ್ತು $b = 0, 1, 2, 3$. ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾ. ಮೇಲೆ ನೋಡಿದಂತೆ, ಶೇಷಗಳ ಗಣ: $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಒಂದು ತಃಖ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ:
 $[a \otimes b \text{ ಮಾಡ್ } 4 \text{ ರ ಕ್ರಿಯೆಗೆ}] (\otimes_4)$

$$\begin{array}{cccc}
 0 \otimes_4 0 \equiv 0 & 0 \otimes_4 1 \equiv 0 & 0 \otimes_4 2 \equiv 0 & 0 \otimes_4 3 \equiv 0 \\
 1 \otimes_4 0 \equiv 0 & 1 \otimes_4 1 \equiv 1 & 1 \otimes_4 2 \equiv 2 & 1 \otimes_4 3 \equiv 3 \\
 2 \otimes_4 0 \equiv 0 & 2 \otimes_4 1 \equiv 2 & 2 \otimes_4 2 \equiv 0 & 2 \otimes_4 3 \equiv 2 \\
 3 \otimes_4 0 \equiv 0 & 3 \otimes_4 1 \equiv 3 & 3 \otimes_4 2 \equiv 2 & 3 \otimes_4 3 \equiv 1
 \end{array}$$

b→	0	1	2	3
a↓	$a \otimes_4 b =$			
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

ಇಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ತಃಖ್ತೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಗಳು $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ ಗಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿವೆ.

A Project of www.eShale.org

3.7.2 ಸಮಸ್ಯೆ 1 : $Q = \{0,2,4,6,8\}$ ಇದರ ಮೇಲಿನ \oplus ಮಾಡ್ 10 ರ ಕೇಲಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ನಮಗೀಗ $a \oplus b$ ಮಾಡ್ 10 ರ ಬೆಲೆಗಳು ಬೇಕು. $a, b \in Q = \{0,2,4,6,8\}$

1. $\frac{6+4}{10}$ ಆದಾಗ ಶೇಷ 0
2. $\frac{6+6}{10}$ ಆದಾಗ ಶೇಷ 2
3. $\frac{8+6}{10}$ ಆದಾಗ ಶೇಷ 4

ಈಗ

$$6 \oplus_{10} 4 \equiv 0$$

$$6 \oplus_{10} 6 \equiv 2$$

$$8 \oplus_{10} 6 \equiv 4$$

ಇದೇರೀತಿ, a, b ಗಳ ಇತರ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಶೇಷವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

$b \rightarrow$	0	2	4	6	8
A	$a \oplus_{10} b =$				
0	0	2	4	6	8
2	2	4	6	8	0
4	4	6	8	0	2
6	6	8	0	2	4
8	8	0	2	4	6

3.7.2 ಸಮಸ್ಯೆ 2 : $A = \{1,5,7,11\}$ ಇದರ ಮೇಲಿನ \otimes ಮಾಡ್ 12 ರ ಕೇಲಿಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ:

ನಮಗೀಗ $a \otimes b$ ಮಾಡ್ 12 ರ ಬೆಲೆಗಳು ಬೇಕು. $a, b \in A = \{1,5,7,11\}$

1. $\frac{7*7}{12}$ ಆದಾಗ ಶೇಷ 1
2. $\frac{7*11}{12}$ ಆದಾಗ ಶೇಷ 5
3. $\frac{11*11}{12}$ ಆದಾಗ ಶೇಷ 1

ಈಗ

$$7 \otimes_{12} 7 \equiv 1 \quad 7 \otimes_{12} 11 \equiv 5 \quad 11 \otimes_{12} 11 \equiv 1$$

ಉಳಿದ a ಮತ್ತು b ಗಳ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ

$b \rightarrow$	1	5	7	11
A	$a \otimes_{12} b =$			
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1