5.5 ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ:

ಪೀಠಿಕೆ:

ನೀವು ವಾರ್ತಾಪತ್ರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟಗಾರರ ಆಟದ ತುಲನೆ ಮಾಡುವುದನ್ನು ಓದಿರಬಹುದು. ಅವರು ಏನನ್ನು ತುಲನೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ? ಒಬ್ಬನು ಇನ್ನೊಬ್ಬನಿಗಿಂತ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದಾನೆ ಅಥವಾ ಒಬ್ಬನು ಇನ್ನೊಬ್ಬನಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಕಲಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಆಡುತ್ತಾನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಕಲಾತ್ಮಕತೆ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟಗುಣ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಲು ಕಷ್ಟ. ಆದರೆ ಅವರು ಗಳಿಸಿದ ರನ್ನುಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಅವರ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುತ್ತಾರೆ.
ಹಾಗಾದರೆ ಈ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವು ಹೇಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ ನೋಡೋಣ.

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ:

ನೀವು ವಿಚಲನೆ ಶಬ್ದಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ತಿಳಿದಿರಬಹುದು. (ನಿಯಮದಿಂದ ವಿಚಲನೆ, ಕೆಲಸದಿಂದ ವಿಚಲನೆ, ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ ವಿಚಲನೆ... ಇತ್ಯಾದಿ) ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಮಾನದಂಡದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುತ್ತೇವೆ.
'ಮಾನ'ವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳ 'ಸರಾಸರಿ' ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5.5 ಉದಾಹರಣೆ.1: ಒಬ್ಬ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟಗಾರನು 6 ಇನಿಂಗ್ಸ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ರನ್ನುಗಳು: 48,50,54,46,48,54

ವಿಧಾನ:

ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸಂಕೇತಗಳು:

X = ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಗಣ. (48,50,54,46,48,54)   N = ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (=6)

$\bar{x}$ =ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿ $= \frac{\sum X}{N}$ d = ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ವಿಚಲನೆ = X - $\bar{x}$

1) $\bar{x} = \frac{(48+50+54+46+48+54)}{6} = 50$

2) d (= X-$\bar{x}$) ಮತ್ತು d^2 ಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ

3) ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ $= \frac{\sum d^2}{N}$

4) ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ: $\sigma = \sqrt{(\sum d^2)/N}$

$= \sqrt{\frac{56}{6}} = \sqrt{9.33}$ = 3.06.

ಸಂ.	ರನ್ನುಗಳು(X)	ವಿಚಲನೆ(d) = X- $\bar{x}$	(ವಿಚಲನೆ)^2 = d^2
1	48	-2	4
2	50	0	0
3	54	4	16
4	46	-4	16
5	48	-2	4
6	54	4	16
	$\sum X = 300$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 56$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ σ (ಸಿಗ್ಮಾ) ದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: 'ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು' ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ವಿಚಲನೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತದ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲ ಆಗಿರುವುದು.

ವಿವರಣೆ: ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಆಟಗಾರನು ಗಳಿಸಿದ ರನ್ನುಗಳು ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ(=50) ಯಿಂದ ಸರಾಸರಿ 3.05 ($\approx$**3**) ರಷ್ಟು ವಿಚಲನೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಮುಂದಿನ ಪಂದ್ಯದಲ್ಲಿ ಆಟಗಾರನು ಸಾಧಾರಣ 47-53 {(50$\pm$3)} ರನ್ನುಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಬಹುದು.

ಗಮನಿಸಿ: ಅಕಸ್ಮಾತ್ ಆಟಗಾರನ ರನ್ನುಗಳು 48,100,50,10,2,80, ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅವನ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಲು ಕಷ್ಟ. ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಅವನ ರನ್ನುಗಳು 50 ರ ಸುತ್ತಮುತ್ತ ಇರುವುದರಿಂದ ನಾವು ಮುಂದಿನ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಅವನು ಗಳಿಸಬಹುದಾದ ರನ್ನುಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಕ್ರಮ:

1) ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು: X = { $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_N$ } ಆಗಿರಲಿ.
2) N = ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.
3) $\bar{x}$ = ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ = $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{N}$ = $\frac{\sum X}{N}$

ಹಂತ 1: ಪ್ರತೀ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಕ್ಕೂ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ವಿಚಲನೆ($d = X - \bar{x}$) ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಹಂತ 2: ಪ್ರತೀ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಕ್ಕೂ d^2 ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಹಂತ 3: ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ = $\frac{\sum d^2}{N}$

ಹಂತ 4: ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ. $(\sigma) = \sqrt{(\sum d^2)/N}$

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ(ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ):

ಸರಾಸರಿಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗದೇ ಇರುವಾಗ σ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು :

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು ಸುಲಭವಾಯಿತು. ಆದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿಯು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗದೇ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ, d^2 ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಕಷ್ಟ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ಬೇರೆಯೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ.

1. ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ (A) ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.
2. ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ವಿಚಲನೆ d(= X-A) ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿ.
3. ವಿಚಲನೆಗಳ ಮೊತ್ತ $\sum d$ ಕಂಡು ಹಿಡಿ.
4. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ವಿಚಲನೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಮತ್ತು ಈ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ (d^2) ವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿ.

ನೈಜ ಸರಾಸರಿ = ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ + $\frac{\sum d}{N}$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ = $\sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$

ಈಗ ನಾವು ಮೇಲೆ ನೋಡಿದ(ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ) ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು (6 ಇನಿಂಗ್ಸ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ರನ್ನುಗಳು: 48,50,54,46,48,54) ಆ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾ.

ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ 54 (A = 54.) ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವಾ. N = 6.

ನೈಜ ಸರಾಸರಿ = ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ + $\frac{\sum d}{N}$

= 54 + $\frac{-24}{6}$ = 54-4 = 50

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ(σ)= $\sqrt{\frac{\sum d^2}{N}-\left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$

= $\sqrt{\frac{152}{6}-\left(\frac{24}{6}\right)^2}$ = $\sqrt{25.33-16}$ = $\sqrt{9.33}$ = 3.06

ಸಂ.	ರನ್ನುಗಳು(X)	ವಿಚಲನೆ d= X-A	(ವಿಚಲನೆ)^2 = d^2
1	48	-6	36
2	50	-4	16
3	54	0	0
4	46	-8	64
5	48	-6	36
6	54	0	0
		$\sum d$ = -24	$\sum d^2$ = 152

ಎರಡೂ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲೂ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ನೈಜ ಸರಾಸರಿ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ.

ಒಂದೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ದತ್ತಾಂಕದಲ್ಲಿ ಹಲವು ಸಾರಿ ಬಂದಿದ್ದರೆ ಈ ಕ್ರಮ ತುಂಬಾ ಸಮಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಬೇರೆ ವಿಧಾನ ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ:

ಒಂದು ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

ಮೌಲ್ಯಗಳು(X) ---→	X_1	X_2	X_3	……	X_n
ಆವೃತ್ತಿ (f) ------→	f_1	f_2	f_3	……	f_n

N = ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತ = $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots. f_n = \sum f$

ಹಂತ 1: ಪ್ರತೀ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಕ್ಕೂ f*x ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 2: ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿ $\bar{x} = \frac{\sum fX}{N}$

ಹಂತ 3: ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಕ್ಕೂ ವಿಚಲನೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ $d = (X - \bar{x})$

ಹಂತ 4: ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ = $\frac{\sum fd^2}{N}$

ಹಂತ 5: ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$

5.5 ಉದಾಹರಣೆ 2: ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 60 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು (X) ---→	10	20	30	40	50	60
ಆವೃತ್ತಿ(ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು) (f)--→	8	12	20	10	7	3

ವಿಧಾನ:

ಮೌಲ್ಯಗಳು (X)	**ಆವೃತ್ತಿ** (f)	fX	**ಮೌಲ್ಯಗಳು** = d = (X- $\bar{x}$)	d^2	$f*d^2$
10	8	80	-20.83	433.89	3,471.12
20	12	240	-10.83	117.29	1,407.48
30	20	600	-.83	0.69	13.8
40	10	400	9.17	84.09	840.9
50	7	350	19.17	367.49	2,572.43
60	3	180	29.17	850.89	2,552.67
	$N=\sum f=60$	$\sum(f*X) = 1,850$			$\sum fd^2 = 10,858.4$

ಸರಾಸರಿ = $\bar{x} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{1850}{60} = 30.83$

ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆ $= \frac{\sum fd^2}{N} = \frac{10858.4}{60} = 180.97$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} = \sqrt{180.97} = 13.45$

ತೀರ್ಮಾನ: ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ = 30.83. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳು ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಸರಾಸರಿ 13.45 ರಷ್ಟು ವಿಚಲನೆ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ d, d^2 ಮತ್ತು $f*d^2$ ಗಳಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು ಲೆಕ್ಕ ಕಷ್ಟವಾಗಿದೆ ಅದಕ್ಕಾಗಿ, ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬೇಕು.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ(ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ)

ಹಂತ 1: ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಸರಾಸರಿಯೆಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ(A)

ಹಂತ 2: ಪ್ರತೀ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೂ ಈ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ವಿಚಲನೆ (d)ಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

ಹಂತ 3: ಪ್ರತೀ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೂ f*d, d^2 ,f*d^2 ಕಂಡು ಹಿಡಿ.

ಹಂತ 4: ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

ಸರಾಸರಿ $= \bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N}$, $N = \sum f$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 30 ನ್ನು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವಾ.

ಅಂಕಗಳು (X) --->	10	20	30	40	50	60
ಆವೃತ್ತಿ(ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು) (f)-->	8	12	20	10	7	3

ಮೌಲ್ಯಗಳು (X)	ಆವೃತ್ತಿ (f)	ವಿಚಲನೆ (d) = X-A	f*d	d^2	$f*d^2$
10	8	-20	-160	400	3,200
20	12	-10	-120	100	1,200
30	20	0	0	0	0
40	10	10	100	100	1,000
50	7	20	140	400	2,800
60	3	30	90	900	2,700
	$N=\sum f=60$		$\sum fd=50$		$\sum fd^2=10,900$

ಸರಾಸರಿ $= A + \frac{\sum fd}{N} = 30 + \frac{50}{60} = 30 + 0.83 =$ 30.83

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{10900}{60} - \left(\frac{50}{60}\right)^2} = \sqrt{181.67 - 0.69} = \sqrt{180.98} =$ 13.45

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ =30.83. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳು ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಸರಾಸರಿ 13.45 ಅಂಕಗಳಷ್ಟು ವಿಚಲನೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ. ಎರಡೂ ವಿಧಾನದಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ಉತ್ತರ ಬಂದಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ:

ಹಂತ 1: ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 2: ಪ್ರತೀ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೂ f*x ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 3: ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ($\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$), $N = \sum f$.

ಹಂತ 4: ಪ್ರತೀ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೂ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ($\bar{x}$) ವಿಚಲನೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ($d = X - \bar{x}$)

ಹಂತ 5: ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೂ d^2 ಮತ್ತು $f*d^2$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 6: ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ (σ) = $\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$

5.5 ಉದಾಹರಣೆ 3: ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು ಹೀಗಿದ್ದರೆ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50
ಆವೃತ್ತಿ	5	10	25	8	2

ವಿಧಾನ:

ಅಂಕಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ(f)	ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು(x)	f*x	$d=(X-\bar{x})$	d^2	$f*d^2$
26-30	5	28	140	-9.2	84.64	423.2
31-35	10	33	330	-4.2	17.64	176.4
36-40	25	38	950	0.8	0.64	16
41-45	8	43	344	5.8	33.64	269.12
46-50	2	48	96	10.8	116.64	233.28
	$N=\sum f = 50$		$\sum fx = 1,860$			$\sum fd^2 = 1,118$

ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ $(\bar{x}) = \frac{\sum fx}{N} = \frac{1860}{50} = 37.2$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ: $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{1118}{50}} = \sqrt{22.36} = 4.729$

ತೀರ್ಮಾನ: ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ =37.2. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳು ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಸರಾಸರಿ ≈ 4.729 ವಿಚಲನೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ (ಹಂತ(ಘಟ್ಟ) – ವಿಚಲನಾಕ್ರಮ):

ಹಂತ 1: ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಸರಾಸರಿ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ(A).

ಹಂತ 2: ಊಹಿಸಿಕೊಂಡ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ‘ಹಂತ–ವಿಚಲನೆ’ (=d) ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$d = \frac{X - A}{i}$ (i = ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ.)

ಹಂತ 3: d^2, f*d ಮತ್ತು f*d^2 ಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 4: ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಂತೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ: $(\bar{x}) = A + \frac{\sum fd}{N} * i$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ: $(\sigma) = \left(\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}\right) * i$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವಾ.
ಇಲ್ಲಿ 43 ನ್ನ ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ (A) ಎಂದು ಊಹಿಸುವಾ. i = ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ = 5.

ಅಂಕಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ(f)	ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು(x)	$d=\frac{X-A}{i}$	f*d	d^2	$f*d^2$
26-30	5	28	-3	-15	9	45
31-35	10	33	-2	-20	4	40
36-40	25	38	-1	-25	1	25
41-45	8	43	0	0	0	0
46-50	2	48	1	2	1	2
	$N=\sum f = 50$			$\sum(f*d) = -58$		$\sum fd^2 = 112$

ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ $(\bar{x}) = A + \left(\frac{\sum fd}{N}\right)*\mathbf{i} = 43 + \frac{-58}{50}*5 = 43 + (-1.16)*5 = 43-5.8 =$ 37.2

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ:$(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} * i = \sqrt{\frac{112}{50} - \left(\frac{-58}{50}\right)^2} * 5 = \sqrt{2.24-(1.16)^2} * 5 = \sqrt{2.24-1.3456} * 5$

$= \sqrt{0.8944} * 5 = 0.9457*5 =$ 4.729

ತೀರ್ಮಾನ: ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ = 37.2. ಅವರು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಸರಾಸರಿ 4.729 ಅಂಕಗಳಷ್ಟು ವಿಚಲಿತವಾಗುತ್ತವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ತಂಡಗಳ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸುವಾಗ ಅವರ ಸ್ಥಿರತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಮಾತನಾಡುತ್ತೇವೆ. ಸಂಖ್ಯಾ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಈ 'ಸ್ಥಿರತೆ'ಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು?

ಈ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು 'ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ' ವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಹರವಿನ ಒಂದು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುತ್ತೇವೆ.

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ = ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ *100÷ಸರಾಸರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು ಮೂಲಮಾನಗಳಿಂದ ಮುಕ್ತವಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಶೇಕಡಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದು. ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣ ಕಡಿಮೆಯಾದಷ್ಟು ಸ್ಥಿರತೆ ಹೆಚ್ಚು. ಸರಾಸರಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ,

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ = $\frac{4.729*100}{37.2}$ = 12.71

5.5 ಉದಾಹರಣೆ 4: A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟಗಾರರು 6 ಇನಿಂಗ್ಸ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ರನ್ನುಗಳು ಹೀಗಿದೆ:

A ಆಟಗಾರ	48	50	54	46	48	54
B ಆಟಗಾರ	46	44	43	46	45	46

ಈ ಮೇಲಿನ ಇಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಯಾರು ಉತ್ತಮ ಸ್ಕೋರರ್? ಯಾರು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆ ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ?

ವಿಧಾನ:

ಈ ಇಬ್ಬರ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.
ಉದಾಹರಣೆ(5.1) ರಲ್ಲಿ A ಆಟಗಾರನ ರನ್ನುಗಳ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.
ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ = 50
ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ = 3.06
ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ = ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ *100÷ಸರಾಸರಿ = $\frac{3.06*100}{50}$ = 6.12%
ಈಗ B ಆಟಗಾರನ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾ.

ಸಂ.	ರನ್ನುಗಳು(X)	ವಿಚಲನೆ(D) d= X-$\bar{x}$	d^2
1	46	1	1
2	44	-1	1
3	43	-2	4
4	46	1	1
5	45	0	0
6	46	1	1
	$\sum X = 270$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 8$

ಸರಾಸರಿ $= \frac{270}{6} = 45 = (\bar{x})$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} = \sqrt{\frac{8}{6}} = \sqrt{1.33} = 1.15$

$\therefore$ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ = ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ *100÷ಸರಾಸರಿ $= \frac{1.15*100}{45} = 2.56\%$

ಫಲಿತಾಂಶ:

1. A ಯ ಸರಾಸರಿಯು B ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು (50>45) ಆದ್ದರಿಂದ Aಯು B ಗಿಂತ ಉತ್ತಮ ಸ್ಕೋರರ್.
2. B ಯ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ A ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ (2.56<6.12) ಆದ್ದರಿಂದ B ಯು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರ ಆಟಗಾರ.

5.5 ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 10 ನೇ ತರಗತಿಯ A ಮತ್ತು B ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

ಅಂಕಗಳು	A ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	B ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
26-30	5	5
31-35	10	12
36-40	25	20
41-45	8	8
46-50	2	5

ಯಾವ ವಿಭಾಗದ ಸಾಧನೆ ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ? ಯಾವ ವಿಭಾಗದ ಸಾಧನೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಸ್ಥಿರ? ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸಲು, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ ಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 3 ರಲ್ಲಿ A ವಿಭಾಗದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ =37.2

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ =4.729

$\therefore$ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ = ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ *100÷ಸರಾಸರಿ = $\frac{4.729*100}{37.2}$ =12.7%

ಈಗ B ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು 'ಹಂತ–ವಿಚಲನ' ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾ.

ಅಂದಾಜಿನ ಸರಾಸರಿ: A =38 ಆಗಿರಲಿ. (A=28,33,43,48 ಯಾವುದೂ ಆಗಬಹುದು)

ಅಂಕಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ (f)	ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು (x)	$d=\frac{X-A}{i}$	fd	d^2	fd^2
26-30	5	28	-2	-10	4	20
31-35	12	33	-1	-12	1	12
36-40	20	38	0	0	0	0
41-45	8	43	1	8	1	8
46-50	5	48	2	10	4	20
	$N=\sum f=50$			$\sum fd=-4$		$\sum fd^2=60$

ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ = $\bar{x}$ = A+ $\left(\frac{\sum fd}{N}\right)$*i = 38 +$\left(\frac{-4}{50}\right)$*5 = 38+ -0.08*5 = 43-0.4 = 37.6

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ: (σ) = $\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}-\left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$ *i= $\sqrt{\frac{60}{50}-\left(\frac{-4}{50}\right)^2}$ *5 = $\sqrt{1.2-(0.08)^2}$ *5= $\sqrt{1.2-0.0064}$ *5

= $\sqrt{1.1936}$ *5=1.0925*5 =5.4625

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ = ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ *100÷ಸರಾಸರಿ = $\frac{5.4625*100}{37.6}$ = 14.52%

ತೀರ್ಮಾನ:

1. B ವಿಭಾಗದ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕವು A ವಿಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದೆ (37.6>37.2), ಆದ್ದರಿಂದ B ಯ ಸಾಧನೆ A ಗಿಂತ ಉತ್ತಮ.
2. B ಯ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು A ವಿಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದೆ (14.52>12.7), ಆದ್ದರಿಂದ B ಯ ಸಾಧನೆಯು A ವಿಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಸ್ಥಿರ.

5.5 ಉದಾಹರಣೆ 6: ಒಂದು ಕೈಗಾರಿಕಾ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಕಾರ್ಖಾನೆಗಳಲ್ಲಿ ನೀಡುವ ಸರಾಸರಿ ವಾರದ ವೇತನ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಹೀಗಿದೆ:

ಕಾರ್ಖಾನೆ	ಸರಾಸರಿ ವೇತನ (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ವೇತನದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ
A	34.5	6.21
B	28.5	4.56

ಯಾವ ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ವೇತನ ನೀಡುವಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ತಾರತಮ್ಯವಿದೆ?

ವಿಧಾನ:

ಈಗ ನಾವು ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು.

A ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ = ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ*100÷ಸರಾಸರಿ = $\frac{6.21*100}{34.5}$ = 18%

B ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ = ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ *100÷ಸರಾಸರಿ = $\frac{4.56*100}{28.5}$ = 16%

A ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು B ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ದರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು (18>16). ಆದ್ದರಿಂದ A ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ವೇತನದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ತಾರತಮ್ಯವಿದೆ.

(A ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ನೌಕರಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ವೇತನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೂ ಸಹ, ಅವರು ನೀಡುವ ವೇತನಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ತಾರತಮ್ಯವಿದೆ.)

ನೆನಪಿಡಿ:

X = ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಗಣ $\bar{x}$ = ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ d = ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ವಿಚಲನೆ.

f = ಮೌಲ್ಯಗಳ ಆವೃತ್ತಿ. i = ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ. x= ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು.

ಸಂ.	ಸಂದರ್ಭ	ಆಯ್ಕೆ (ಸರಾಸರಿ)	N=	ಸರಾಸರಿ AM=	ವಿಚಲನೆ (d)	ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ(σ)
1	ಬಿಡಿ ಮೌಲ್ಯಗಳು		ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	$\bar{x} = \frac{\sum X}{N}$	X- $\bar{x}$	$\sqrt{(\sum d^2)/N}$
		A=ಯಾವುದೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ	ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	$\bar{x}$ = A+ $\frac{\sum d}{N}$	X-A	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$
2	ಆವರ್ತ ಇರುವ ಮೌಲ್ಯಗಳು		$\sum f$	$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$	X- $\bar{x}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$
		A=ಯಾವುದೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ	$\sum f$	$\bar{x}$ = A + $\frac{\sum fd}{N}$	X-A	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$
3	ಆವರ್ತ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರ		$\sum f$	$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$	X- $\bar{x}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$
		A=ಯಾವುದೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ	$\sum f$	$\bar{x}$ = A+ $\left(\frac{\sum fd}{N}\right)$ *i	$\frac{X-A}{i}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$ *i

ಸೂಚನೆ: ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಗೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸೂತ್ರ ನೆನಪಿಡಿ: $\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$ *i

ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡದೇ ಇರುವ/ಆವರ್ತ ಇಲ್ಲದೇ ಇರುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ , f=1, i=1 ಆದೇಶಿಸಿ, ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸರಿಯಾದ ಸೂತ್ರ ಪಡೆಯಿರಿ.ಯಾವುದೇ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ (A) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದಿದ್ದಾಗ, $\sum fd , \sum d = 0$