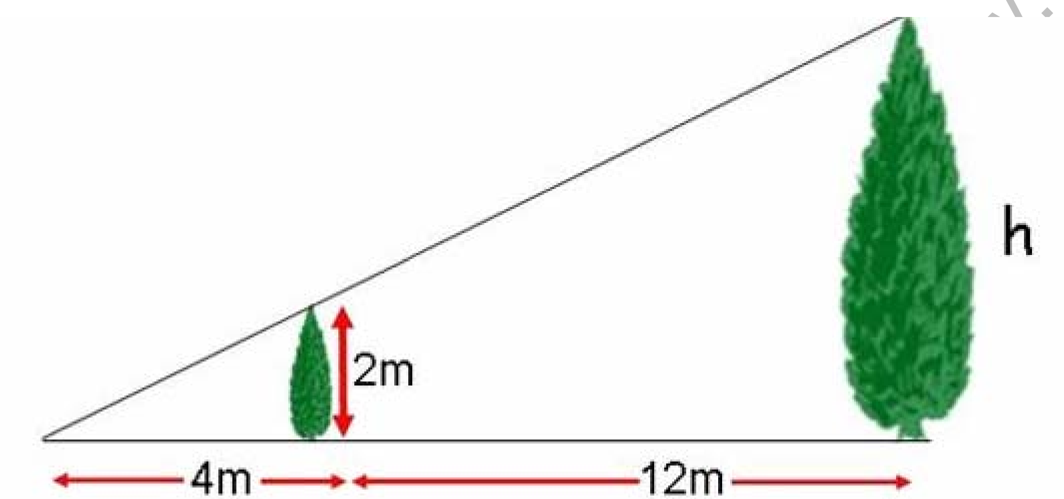
6.13 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯ ಗಳು:

ನೀವು ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕೇಳಿರಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನ ಹತ್ತದೆಯೇ, ಪ್ರಾಚೀನಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರಬಹುದು? ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ಅಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನ ಮತ್ತು ದೂರಗಳನ್ನ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪ ಗುಣಗಳನ್ನ ಆಧರಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಇದೇ ರೀತಿ ಇಂದಿಗೂ ವಾಹನಗಳ ತಯಾರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ, ಬಾಹ್ಯಾಕಾಶ ಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಇತರ ಹಲವು ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸಮರೂಪ ತತ್ವವನ್ನ ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.



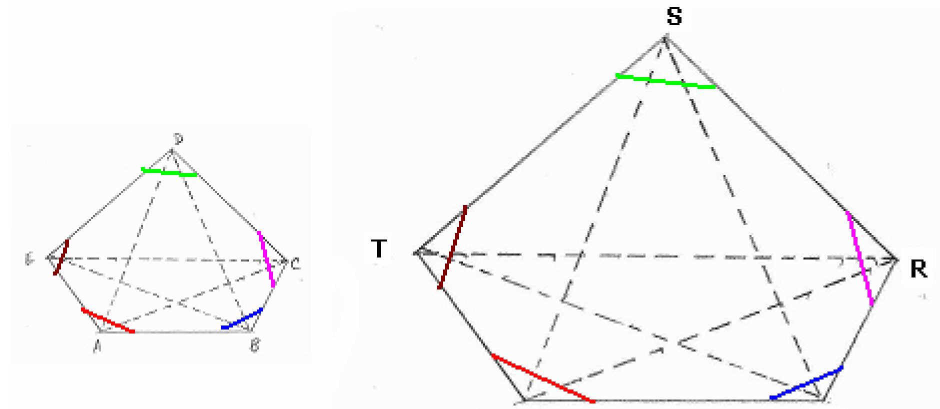
www.eShale.org

ಪಕ್ಕದ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿನೀವೇನನ್ನ ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ? ಈ ಎರಡೂ ಆಕೃತಿಗಳು ಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧದಲ್ಲಿಯೂ ಸಮರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದನ್ನ ನೋಡುವಿರಿ.ನಿಜವಾಗಿ ಚಿತ್ರ 2 ರ ಗಾತ್ರ ಚಿತ್ರ 1 ರ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ.ಎರಡೂ ಆಕೃತಿಗಳ ಬಾಹುಗಳನ್ನ ಅಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದನ್ನ ಗಮನಿಸಿ.

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \ldots\ldots = \frac{1}{2}$$

ಎರಡೂ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

$\angle EAB = \angle TPQ$, $\angle ABC = \angle PQR$, $BCD = \angle QRS$, . . .



ಚಿತ್ರ 1

ಚಿತ್ರ 2

A Project of w

ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಗಳ

1. ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ,

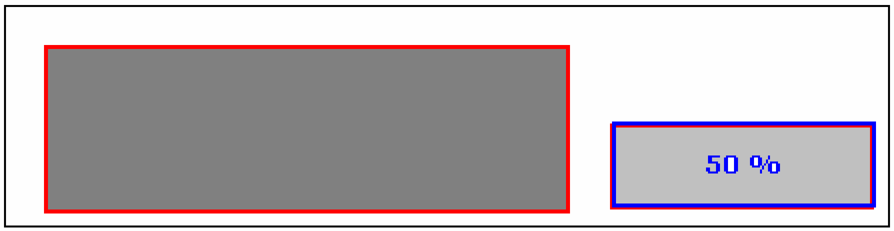
ಮತ್ತು

2. ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ,

ಆಗ ಅವು ‘ಸಮರೂಪ ಬಹುಭುಜ’ ಆಕೃತಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನ ‘|||’ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಮವಾದ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ನಿಯಮಿತ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಎರಡು ಆಯತಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಲು, ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಅನುಪಾತ =ಅಗಲಗಳ ಅನುಪಾತ ಆಗಿರಬೇಕು.

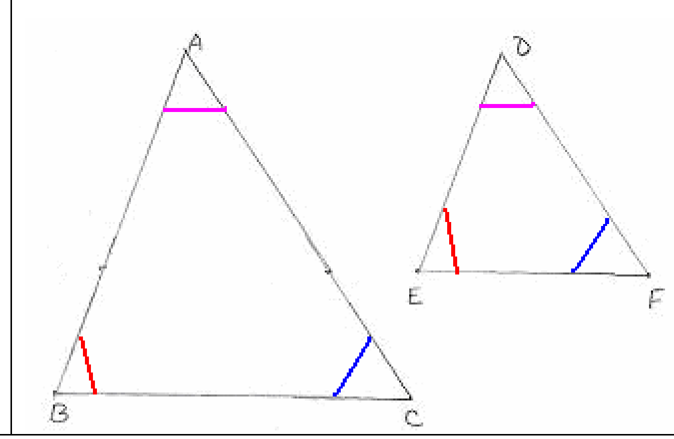


ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನ ಗಮನಿಸಿ, ಅವು ಒಂದೇ ಆಕಾರದವುಗಳಾಗಿವೆ.

$\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ACB = \angle DFE$

ಆಗ $\triangle ABC$ ಮತ್ತು $\triangle DEF$ ಗಳು ಸಮರೂಪಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

ಇದನ್ನ $\triangle ABC$ ||| $\triangle DEF$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



A Project of www.eShale.org

	ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿ	ಸಮರೂಪಿ ಆಕೃತಿ
1	ಒಂದೇ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು, ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದವುಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.	ಒಂದೇ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಗಾತ್ರ ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.
2	ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.	ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.
3	ಅವು ಸಮ ರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.	ಅವು ಸರ್ವಸಮ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂದೇನೂ ಇಲ್ಲ.

ಪಾಠ 6.3.3 ರಲ್ಲಿ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

"ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ. ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ". ಇದನ್ನ **ಸಮರೂಪತೆಯ ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ.** (**ಕೋನ, ಕೋನ, ಕೋನ**) **ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಎನ್ನುವರು.**

ಗಮನಿಸಿ:

ಈ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವನ್ನ '**ಸಮರೂಪತೆಯ ಕೋನ ಕೋನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ**'ಎಂತಲೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಎರಡು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಮೂರನೇ ಜೊತೆ ಕೋನ ಕೂಡಾ ಸಮ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. (ತ್ರಿಕೋನದ 3 ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0)

A Project of www.eShale.org

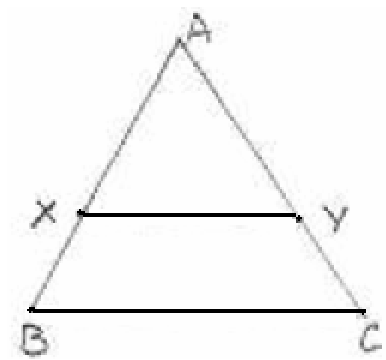
6.13.1. ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ (ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ) ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನ ಸಮಾನ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ: $\triangle$ABC ಯಲ್ಲಿ X ಎಂಬುದು AB ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು, Y ಯು AC ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ಹಾಗೂ XY ||BC.

ಸಾಧನೀಯ: $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$

ಸಾಧನೆ:

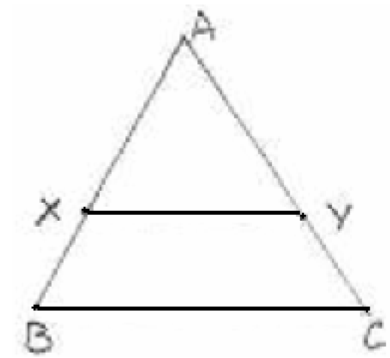
$\triangle$ABC ಮತ್ತು $\triangle$AXY ಯಲ್ಲಿ.

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು	
1	$\angle AXY = \angle ABC$	(XY||BC) ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು.	
2	$\angle AYX = \angle ACB$	ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು (XY||BC)	
3	$\angle XAY = \angle BAC$	ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ	
4	$\triangle ABC \mid\mid\mid \triangle AXY$	ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ.	
5	$\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$	ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.	
6	$\frac{AX+BX}{AX} = \frac{YC+AY}{AY}$		
7	$1+\frac{BX}{AX} = 1+\frac{YC}{AY}$		
8	$\frac{BX}{AX} = \frac{YC}{AY}$		
9	$\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$		

A Project of www.eShale.org

6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 1: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ XY || BC ಆದರೆ, $\frac{AB}{BX}=\frac{AC}{YC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\frac{AX}{BX}=\frac{AY}{CY}$	ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ
2	$1+\frac{AX}{BX}=1+\frac{AY}{CY}$	1 ನ್ನ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದೆ.
3	$\frac{XB+AX}{BX}=\frac{YC+AY}{CY}$	X ಮತ್ತು Y ಗಳು AB ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು.
4	$\frac{AB}{BX}=\frac{AC}{YC}$	



ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯ: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಆ ಸರಳರೇಖೆಯು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

A Project of www.eShale.org

6.13.1. ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪ ಪ್ರಮೇಯ:

ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದಾಗ, ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.(ಹೊಸ ತ್ರಿಭುಜವು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ)

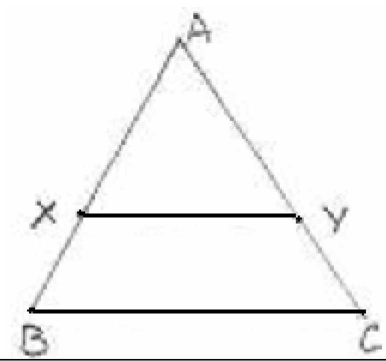
ದತ್ತ: XY ಯು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC} = \frac{XY}{BC}$

ಸಾಧನೆ:

Δ ABC ಮತ್ತು Δ AXY ಯಲ್ಲಿ.

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\angle AXY = \angle ABC$	(XY||BC) ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು.
2	$\angle AYX = \angle ACB$	ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು (XY||BC)
3	$\angle XAY = \angle BAC$	ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ
4	$\Delta ABC \;\|\|\|\; \Delta AXY$	ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ.
5	$\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC} = \frac{XY}{BC}$	ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.



A Project of www.eShale.org

6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 2: ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಅದರ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

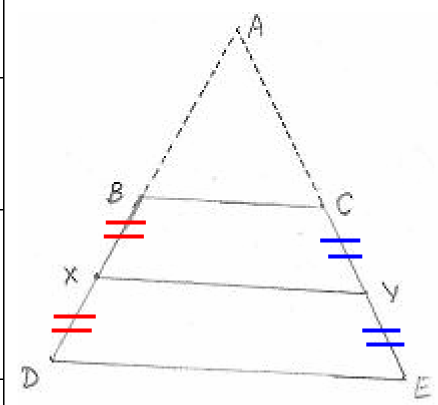
ದತ್ತ: BCED ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ. X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ. DB ಮತ್ತು CE ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು.

ಸಾಧನೀಯ: XY || DE

ರಚನೆ: DB ಮತ್ತು EC ಗಳನ್ನ ವೃದ್ಧಿಸಿ. ಅವುಗಳು ಸೇರುವ ಬಿಂದು A (DB ಮತ್ತು EC ಗಳು ಸಮಾಂತರವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲೇಬೇಕು)

ಸಾಧನೆ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$	ಮೂಲಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ನಿಯಮ. (DE || BC)
2	$\frac{AX-BX}{BD} = \frac{AY-CY}{CE}$	X ಮತ್ತು Y ಗಳು DA ಮತ್ತು EA ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು
3	$\frac{AX}{BD} - \frac{BX}{BD} = \frac{AY}{CE} - \frac{CY}{CE}$	X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು BD=2BX=2DX,CE=2YE=2CY
4	$\frac{AX}{2DX} - \frac{1}{2} = \frac{AY}{2YE} - \frac{1}{2}$	3 ರಿಂದ
5	$\frac{AX}{DX} = \frac{AY}{YE}$	4ರಲ್ಲಿ $\frac{1}{2}$ ವನ್ನು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ, ನಂತರ 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ.
6	XY || DE	ಮೂಲಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ನಿಯಮದ ವಿಲೋಮ.



A Project of www.eShale.org

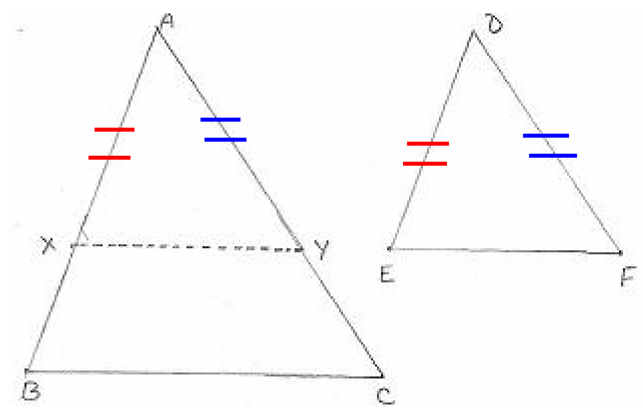
6.13.1. ಪ್ರಮೇಯ 1: ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಕೋನೀಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: ΔABC ಮತ್ತು ΔDEFಗಳಲ್ಲಿ $\angle BAC = \angle EDF, \angle ABC = \angle DEF, \angle ACB = \angle DFE$

ಸಾಧನೀಯ: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

ರಚನೆ: AX=DE ಮತ್ತು AY=DF ಆಗುವಂತೆ AB ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮೇಲೆ X ಮತ್ತು Y ಬಿಂದುಗಳನ್ನ ಗುರುತಿಸಿ.
XY ಸೇರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:



ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\angle XAY = \angle EDF$	ದತ್ತ
2	AX=DE,AY=DF	ರಚನೆ
3	$\Delta AXY \cong \Delta DEF$	ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ
4	$\angle AXY = \angle DEF$ XY=EF	ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಲಕ್ಷಣ
5	$\angle AXY = \angle ABC$ $\angle DEF = \angle ABC$	ದತ್ತ
6	XY||BC	ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು $\angle AXY$ ಮತ್ತು $\angle ABC$ ಗಳು ಸಮ.
7	$\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY} = \frac{BC}{XY}$	ಮೂಲಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ನಿಯಮದ ಉಪ ಪ್ರಮೇಯ.
8	$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$	(2),(4) ರಿಂದ

A Project of www.eShale.org

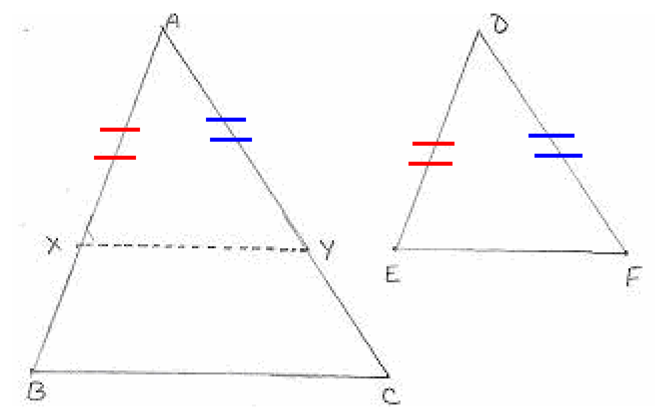
6.13.1. ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ: ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಕೋನೀಯಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: $\triangle ABC$ ಮತ್ತು $\triangle DEF$ಗಳಲ್ಲಿ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

ಸಾಧನೀಯ: $\angle BAC = \angle EDF, \angle ABC = \angle DEF, \angle ACB = \angle DFE$

ರಚನೆ: AX=DE ಮತ್ತು AY=DF ಆಗುವಂತೆ AB ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮೇಲೆ. X ಮತ್ತು Y ಬಿಂದುಗಳನ್ನ ಗುರುತಿಸಿ. XY ಸೇರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:



ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$	ದತ್ತ
2	AX =DE,AY=DF	ರಚನೆ
3	$\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$	1 ಮತ್ತು 2 ರಿಂದ
4	XY‖BC	ಮೂಲಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ನಿಯಮದ ವಿಲೋಮ.
5	$\angle AXY = \angle ABC$, $\angle AYX = \angle BCA$	ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ.
6	$\angle AXY = \angle DEF$, $\angle AYX = \angle DFE$	ರಚನೆಯಿಂದ, $\triangle AXY$ ಮತ್ತು $\triangle DEF$ಗಳು ಸರ್ವಸಮ.
7	$\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle DFE$	5 ಮತ್ತು 6 ರಿಂದ, ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ.
8	$\angle BAC = \angle EDF$	ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದಾಗ, ಮೂರನೆ ಜೊತೆಯೂ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ.

A Project of www.eShale.org

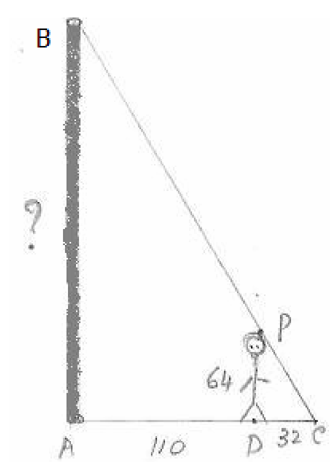
6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 3: ನೀವು ಕುತುಬ್‌ಮಿನಾರ್ ಬಳಿಯ(ಮೆಹ್ರೌಲಿ)ಒಂದು ಸ್ಥಂಭದ ಬಗ್ಗೆ ಕೇಳಿರಬಹುದು. ಅದು ಚಂದ್ರಗುಪ್ತನು ಕಟ್ಟಿದ ಕಬ್ಬಿಣದ ಸ್ಥಂಭ. ಆ ಸ್ತಂಭ ಕ್ರಿ.ಶ.400 ರಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಿದ್ದರೂ ಕೂಡಾ ಈವರೆಗೂ ತುಕ್ಕು ಹಿಡಿದಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಆಶ್ಚರ್ಯಕರ. ಇದರ ಎತ್ತರವನ್ನ ಹತ್ತದೆಯೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ? ನೀವೇ ಅಲ್ಲಿಗೆ ಪ್ರವಾಸಕ್ಕೆ ಹೋಗಿದ್ದೀರೆಂದು ಊಹಿಸಿ. ಆ ಸ್ತಂಭದಿಂದ ನೀವು 9 ಅಡಿ 2 ಅಂಗುಲ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದೀರೆಂದು ಊಹಿಸಿ. ಆಗ ಕಂಬದಿಂದಾಗಿ ಬಿದ್ದ ನಿಮ್ಮ ನೆರಳು 2ಅಡಿ 8 ಇಂಚು ಇದ್ದು, ನಿಮ್ಮ ಎತ್ತರ 5 ಅಡಿ 4 ಇಂಚು ಆಗಿದ್ದರೆ, ಕಂಬದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸುಲಭವಾಗಲು ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳನ್ನ ಇಂಚುಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

A Project of www.eShale.org

ಸ್ಥಂಭವನ್ನ AB ಯು ಸೂಚಿಸಲಿ. ನೀವು D ಯಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದೀರಿ. A ಯಿಂದ D ಗೆ ಇರುವ ದೂರ 110 ಇಂಚುಗಳು(9’2”) ನಿಮ್ಮ ಎತ್ತರವನ್ನ DP = 64” (5’4”) ಸೂಚಿಸಲಿ. ಕಂಬದಿಂದ ಉಂಟಾದ ನೆರಳು DC ಯು 32”.



$\angle BAC = \angle PDC = 90^0$, $AB \parallel DP$. $\therefore \angle ABP = \angle DPC$

$\angle ACB$ ಯು $\triangle BAC$ ಮತ್ತು $\triangle PDC$ ಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ.

$\therefore \triangle BAC$ ಮತ್ತು $\triangle PDC$ ಗಳು ಸಮಕೋನೀಯಗಳಾಗಿವೆ.

$\therefore$ ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore \frac{AB}{PD} = \frac{AC}{DC}$, $AC = AD + DC = 110 + 32 = 142''$

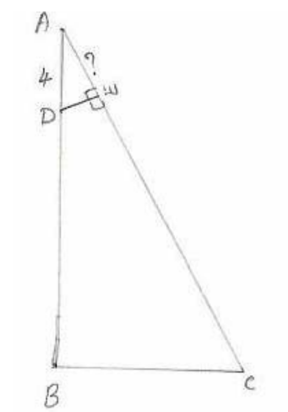
$\therefore AB = \frac{AC * PD}{DC} = \frac{142 * 64}{32} = 284''$

ಕಬ್ಬಿಣದ ಸ್ಥಂಭದ ಎತ್ತರ = 284 ಇಂಚುಗಳು = 23 ಅಡಿ 8 ಇಂಚು

ನೀವು ಚರಿತ್ರೆಯ ಪುಸ್ತಕದಿಂದ ಈ ಉತ್ತರ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದನ್ನ ಗಮನಿಸಬಹುದು.

6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 4: ΔABC ಯು B ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ. D ಯು AB ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು. DE $\perp$ AC. AD=4 ಮಿ., AB=16 ಮಿ., AC=24 ಮಿ., AE ಯನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

<table>
<tr>
<td>
$\angle$ABC = $\angle$DEA = 90^0. Aಯು ΔABC ಮತ್ತು ΔDAE ಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಶೃಂಗ.
$\angle$BAC = $\angle$DAE.
ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ, 3 ನೇ ಕೋನವೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮ. ($\angle$BCA=$\angle$ADE).
$\therefore$ ΔABC ||| ΔDEA ಆದ್ದರಿಂದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.
ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು :
AC, AD (ವಿಕರ್ಣ)
BC, DE ($\angle$A ಯ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು)
AB, AE
$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}$ $\therefore$ AE = $\frac{AB*AD}{AC} = \frac{16*4}{24} = \frac{16}{6}$ =2.67ಮಿ.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

A Project of www.eShale.org

6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 5: ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ, AD||BC ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\frac{OB}{OC} = \frac{OD}{OA}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

AD||BC ಆದ್ದರಿಂದ,

$\angle BCO = \angle OAD$, $\angle CBO = \angle ODA$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

AC ಮತ್ತು BD ಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$\angle COB = \angle AOD$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖಿ ಕೋನಗಳು)

$\therefore$ ΔBCO ಮತ್ತು ΔDOA ಗಳು ಸಮಕೋನೀಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

$\therefore$ ಇವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.

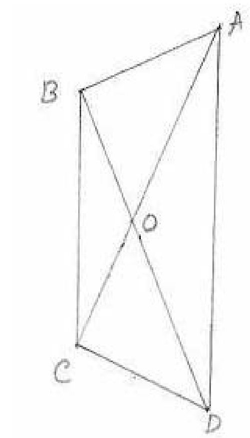
ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು :

OB, OD ($\angle BCO$ ಮತ್ತು $\angle OAD$ ಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು)

OC, OA ($\angle CBO$ ಮತ್ತು $\angle ODA$ ಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು)

$\therefore$ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ, $\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA}$ ಅಥವಾ OB*OA=OD*OC

$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{OD}{OA}$



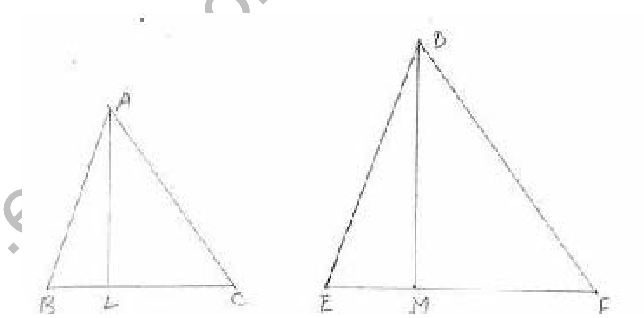
A Project of www.eShale.org

6.13.1 ಪ್ರಮೇಯ 2: ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳು ಸಮರೂಪಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳು. BC ಮತ್ತು EF ಗಳು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು.

ಸಾಧನೀಯ: ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\div$ ΔDEF ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$

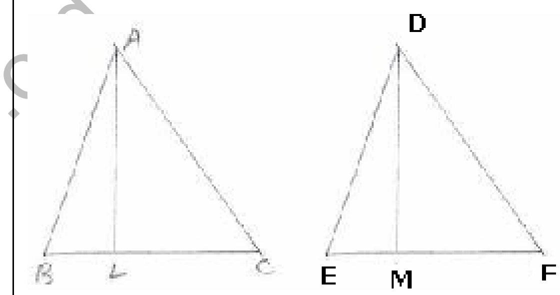
ರಚನೆ: AL $\perp$ BC ಮತ್ತು DM $\perp$ EF ಎಳೆಯಿರಿ.

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	
1	ΔABCಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}$BC*AL	
2	ΔDEFಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}$EF*DM	
3	(ΔABCಯವಿಸ್ತೀರ್ಣ) $\div$ (ΔDEFಯವಿಸ್ತೀರ್ಣ) $= \frac{BC}{EF} * \frac{AL}{DM}$	
4	$\angle$ABL $=\angle$DEM ($\because$ ΔABC $\|\|\|$ ΔDEF)	
5	$\angle$ALB $=\angle$DME$=$ 90^0 (ರಚನೆಯಿಂದ) $\therefore$ ΔABL $\|\|\|$ ΔDEM	
6	$\frac{AL}{DM} = \frac{AB}{DE} = \frac{BL}{EM}$ ($\because$ಸಮರೂಪಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.)	
7	$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ {$\because$ ΔABC $\|\|\|$ ΔDEF (ದತ್ತ)}	
8	$\therefore \frac{AL}{DM} = \frac{BC}{EF}$ {(6) ಮತ್ತು (7) ರಿಂದ) }	
9	$\therefore$ (ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) $\div$ (ΔDEF ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) $= \frac{BC}{EF} * \frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$ {(3) ಮತ್ತು (8) ರಿಂದ)}	

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಇನ್ನೆರಡು ಸಮತೆಗಳನ್ನ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

6.13.1 ಉಪಪ್ರಮೇಯ :ಎರಡು ಸಮರೂಪಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ.

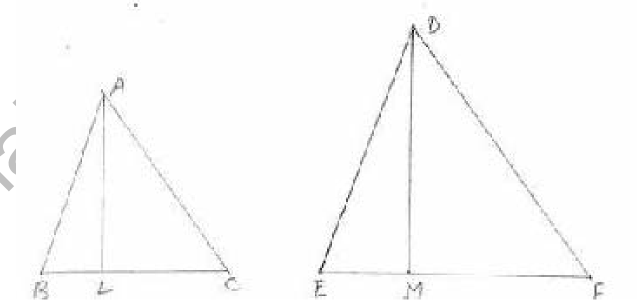
ಸಾಧನೆ:

ΔABC ಮತ್ತು ΔDEFಗಳು ಎರಡು ಸಮರೂಪಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ಪಾದ BC ಮತ್ತು EF $\therefore$ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, (ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ)$\div$(ΔDEF ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) = $\frac{BC^2}{EF^2}$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ, BC=EF	
ಇದೇ ರೀತಿ ಇನ್ನೆರಡು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವೆಂದರೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದಿಂದ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ	

A Project of www.eShale.org

6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 6: ಎರಡು ಸಮರೂಪಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಜೋಡಿ ಎತ್ತರಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

<table>
<tr>
<td>
Δ ALB ಮತ್ತು Δ DME ಗಳು ಸಮಕೋನೀಯಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.
$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AL}{DM} \quad \therefore \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{AL}{DM}\right)^2 \ \text{--->}(1)$
Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEF ಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ,
Δ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\div$ Δ DEF ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
$= \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AL^2}{DM^2}$ (1 ರಿಂದ)
=ಎತ್ತರಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತ.
</td>
<td>


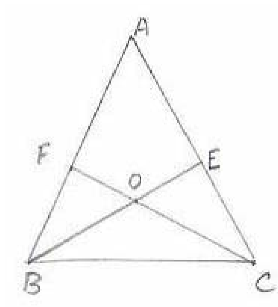
</td>
</tr>
</table>

A Project of www.eSha

6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 7: ΔABC ಯಲ್ಲಿ $BE \perp AC$, $CF \perp AB$. BE ಮತ್ತು CF ಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ΔBOF ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\div \Delta COE$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{BF^2}{CE^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು	
1	$\angle BFO = \angle CEO = 90^0$	ದತ್ತ	
2	$\angle BOF = \angle COE$	ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು	
3	$\angle FBO = \angle OCE$	2 ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ 3ನೇ ಜೊತೆಯೂ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.	
4	$\Delta BFO \ \vert\vert\vert \ \Delta CEO$	ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕೋನೀಯಗಳು	
5	ΔBFO ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\div \Delta CEO$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{BF^2}{CE^2}$	ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ	

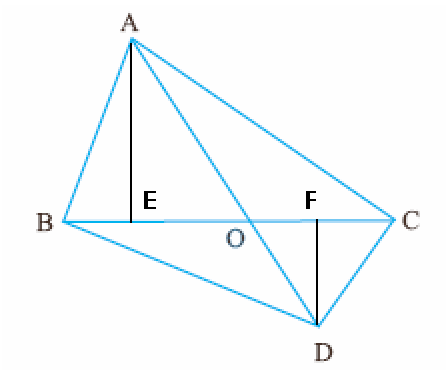
A Project of www.eSnale.org

6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 8: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔDBC ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯನ್ನ ಹೊಂದಿವೆ.

Δ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\div \Delta$DBC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{AO}{DO}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ರಚನೆ: AE $\perp$ BC ಮತ್ತು DF $\perp$ BC ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು	
1	$\angle AOE = \angle DOF$	ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು	
2	$\angle AEO = \angle DFO = 90^0$	ರಚನೆ	
3	$\Delta AEO \,\vert\vert\vert\, \Delta DFO$	ಪ್ರಮೇಯ	
4	$\frac{AE}{DF} = \frac{AO}{DO}$	ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.	
5	Δ ABC ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\div \Delta$DBC ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \{\frac{1}{2}BC*AE\} \div \{(\frac{1}{2})BC*DF\} = \frac{AE}{DF} = \frac{AO}{DO}$		

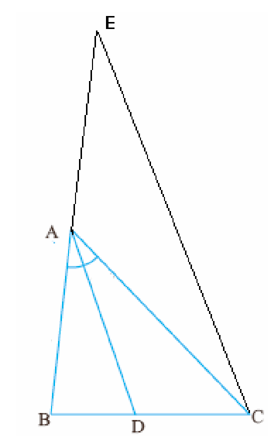
A Project of www.eShale.org

6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 9: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕೋನದ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವನ್ನು ಆ ಕೋನವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿಯೇ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೀಯ: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

ರಚನೆ: C ಯಿಂದ AD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಅದು BA ಯ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗವನ್ನ E ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. DA||CE

ಸಾಧನೆ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು	
1	DA||CE	ರಚನೆ	
2	$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$	$\triangle$BCE ಯಲ್ಲಿ ಮೂಲಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ನಿಯಮ.	
3	$\angle$BAD = $\angle$AEC	DA||CE ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು	
4	$\angle$DAC = $\angle$ACE	DA||CE ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು	
5	$\angle$BAD = $\angle$DAC	AD ಯು $\angle$BAC ಕೋನಾರ್ಧಕ	
6	$\angle$AEC = $\angle$ACE	3,4 ಮತ್ತು 5 ರಿಂದ	
7	AE=AC	6 ರಿಂದ ($\triangle$CAE ಯು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನ)	
8	$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$	2 ರಿಂದ	

A Project of www.eShale.org

6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 10: ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ BD ಕರ್ಣವು $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಯನ್ನ ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ, AB*CD =AD*BC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸುಳಿಹು:

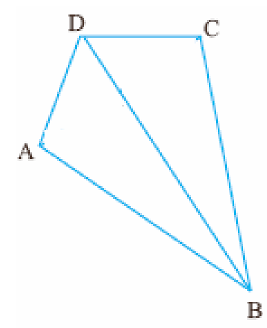
1. $\angle ADB = \angle CDB$, $\angle ABD = \angle CBD$
($\because$ BD ಯು $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಗಳನ್ನ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.)

2. ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದಿಂದ, $\triangle ADB \; ||| \; \triangle CDB$

3. ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

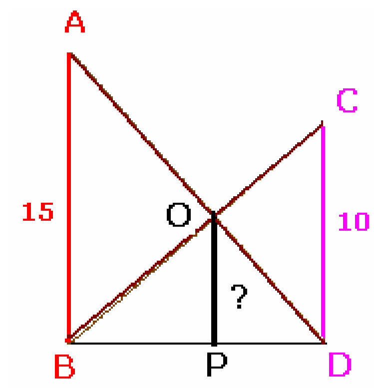
$\therefore$ AB*CD =AD*BC



A Project of www.eShale.org

6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 11: 15, 10 ಮೊಳ ಎತ್ತರವಿರುವ ಕೋಲುಗಳ ಮೂಲಕ್ಕೂ ತುದಿಗೂ ಎಳೆದ ದಾರಗಳ ಛೇಧನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಪ್ರಮಾಣ ಎಷ್ಟು? ('ಲೀಲಾವತಿ' ಶ್ಲೋಕ 162)

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\frac{OP}{CD} = \frac{BP}{BD}$	OP || CD , ಮೂಲಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಉಪಪ್ರಮೇಯ.
2	$\frac{OP}{AB} = \frac{PD}{BD}$	OP || AB , ಮೂಲಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಉಪಪ್ರಮೇಯ.
3	$\frac{OP}{CD} + \frac{OP}{AB} = \frac{BP}{BD} + \frac{PD}{BD}$	(1),(2) ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ
4	$\frac{OP(AB+CD)}{AB*CD} = \frac{PD+BP}{BD} = 1$	(PD+BP) =BD
5	OP = $\frac{AB*CD}{AB+CD} = \frac{15*10}{25} = 6$ ಮೊಳ	
ಗಮನಿಸಿ: BP ಅಥವಾ PD ನೀಡಿದರೆ, ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.		



A Project of www.eShale.org

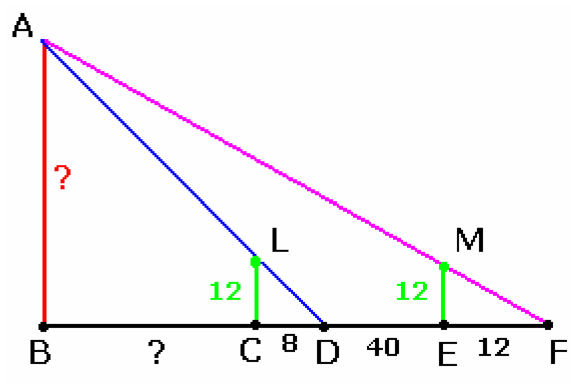
6.13.1 ಸಮಸ್ಯೆ 12: 12 ಅಂಗುಲ ಎತ್ತರವುಳ್ಳ ಬೊಂಬೆಯ ನೆರಳು 8 ಅಂಗುಲವಿದ್ದು, 2 ಹಸ್ತ ದೂರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೋದ ಮೇಲೆ ಅದರ ನೆರಳು 12 ಅಂಗುಲ ಆದರೆ ಲೀಲಾವತಿಯೇ, ದೀಪದಿಂದ ಬೊಂಬೆಯ ದೂರವನ್ನೂ, ದೀಪದ ಎತ್ತರವನ್ನೂ ಬೇಗ ಹೇಳು. ('ಲೀಲಾವತಿ' ಶ್ಲೋಕ 244) ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸಲು ಅವನು ಸೂತ್ರ ನೀಡಿದ್ದಾನೆ.

AB ದೀಪದ ಎತ್ತರ. CL ಮತ್ತು EM ಬೊಂಬೆ(=12” ಎತ್ತರ).

C ನಲ್ಲಿ ಬೊಂಬೆಯ ನೆರಳು CD(= 8”). BC ದೀಪದಿಂದ ಬೊಂಬೆಗೆ ಇರುವ ದೂರ.

C ಯಿಂದ 2 ಹಸ್ತ(CE=48”, ∵ 1 ಹಸ್ತ=24”) ದೂರ ಹೋದಾಗ ಬೊಂಬೆಯ ನೆರಳು(EF =12”).

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\frac{AB}{LC} = \frac{BD}{CD}$	LC||AB ,ಮೂಲಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಉಪಪ್ರಮೇಯ.
2	$\frac{AB}{ME} = \frac{BF}{EF}$	ME||AB,ಮೂಲಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಉಪಪ್ರಮೇಯ.
3	$\frac{BD}{CD} = \frac{BF}{EF}$	LC=ME=12, (1),(2) ರಿಂದ
4	$\frac{BC+CD}{CD} = \frac{BC+CD+DE+EF}{12}$	BD = (BC+CD), BF =(BC+CD+DE+EF) , EF=12
5	$\frac{BC}{8}+1 = \frac{BC}{12}+5$	CD=8, (CD+DE+EF) = 8+40+12 =60
6	BC($\frac{1}{8}$-$\frac{1}{12}$) = 4	ಗಮನಿಸಿ: $\frac{1}{8}$-$\frac{1}{12} = \frac{(6-4)}{48} = \frac{1}{24}$
7	BC =24*4 =96” ∴ BD = 104”	BD = BC+CD = 96+8
8	AB = $\frac{BD*LC}{CD}$ (1) ರಿಂದ = $\frac{104*12}{8}$ = 156”	



A Product of www.eShala.org

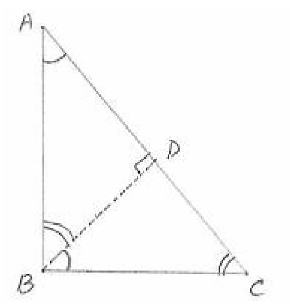
6.13.2 ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ: ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣದ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ. B ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾದಾಗ $AC^2 = AB^2+BC^2$

ದತ್ತ: $\triangle$ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle ABC = 90^0$

ಸಾಧನೀಯ: $AC^2 = AB^2+BC^2$

ರಚನೆ: ವಿಕರ್ಣ ACಗೆ BD ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ:



ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\angle ABC = 90^0$	ದತ್ತ
2	$\angle BDA = 90^0$	ರಚನೆ
3	$\angle BAC = \angle BAD$	ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ
4	$\therefore \angle ABD = \angle BCD$	2ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ ಮೂರನೇ ಕೋನವೂ ಸಮ.
5	$\triangle ABC \,\vert\vert\vert\, \triangle ADB$	ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕೋನೀಯಗಳಾಗಿವೆ.
6	$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$	ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.
7	$\therefore AB^2 = AC*AD$	
8	$\triangle ABC \,\vert\vert\vert\, \triangle CDB$	$\triangle$ABC ಮತ್ತು $\triangle$CDB ಗಳಿಗೆ (1) ರಿಂದ (5)ರ ವರೆಗೆ ಹಂತಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ
9	$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC} \quad \therefore BC^2 = AC*CD$	
10	$\therefore AB^2 + BC^2 = AC*AD+AC*CD = AC(AD+CD) = AC*AC \quad \therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$	

A Project of www.eShale.org

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನ ಗಮನಿಸಿ:–

1. $25 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
2. $100 = 10^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36$

ಈರೀತಿ, (3,4,5), (6,8,10), (8,15,17), ಇವುಗಳನ್ನ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಗಮನಿಸಿ:– ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನ ಮೊತ್ತ ಮೊದಲಿಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದವರು ಕ್ರಿ.ಪೂ.600 ರಲ್ಲಿ ಭಾರತೀಯರಾದ ಭೋಧಾಯನರು.

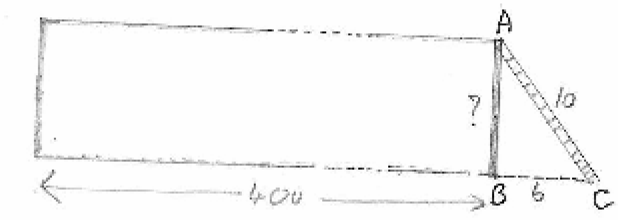
ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ: ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ, ಆ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಲಂಬಕೋನದಿಂದ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.($AC^2 = AB^2 + BC^2$ ಆದರೆ $\angle B = 90^0$)

A Project of www.eShale.org

6.13.2 ಸಮಸ್ಯೆ 1: ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 400 ಅಡಿ ಉದ್ದದ ಆವರಣ ಗೋಡೆಯಿದೆ. ಒಬ್ಬ ಪೈಂಟರ್‌ನಿಗೆ ಆ ಗೋಡೆಗೆ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ದರ ಚದರ ಅಡಿಗೆ ರೂ. 80. ಅವನ ಹತ್ತಿರ ಒಂದು 10 ಅಡಿ ಉದ್ದದ ಏಣಿಯಿದೆ. ಆ ಏಣಿಯನ್ನ ಗೋಡೆಗೆ ಒರಗಿಸಿ ಇಟ್ಟಾಗ ಏಣಿಯ ತುದಿ, ಗೋಡೆಯ ತುದಿಗೆ ತಾಗಿದ್ದು, ಏಣಿಯ ಬುಡವು ಗೋಡೆಯಿಂದ 6 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪೈಂಟರನಿಗೆ ಶಾಲೆಯವರು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಹಣವನ್ನ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

ಪರಿಹಾರ:

A Project of www.eShale.org

ನಾವೀಗ ಪೈಂಟರನಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಹಣವನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲಿಗೆ ಗೋಡೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ ಗೊತ್ತಿದೆ.(400 ಅಡಿ). ಆದುದರಿಂದ ಎತ್ತರವನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. AB ಯು ಗೋಡೆಯ ಎತ್ತರ, AC ಯು ಏಣಿ, BC ಯು ಗೋಡೆಯಿಂದ ಏಣಿಗಿರುವ ದೂರವಾದರೆ,	

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

ಬೆಲೆಗಳನ್ನ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, AC=10, BC=6

$10^2 = 6^2 + AB^2 \therefore AB^2 = 100-36 = 64 \therefore$ ಗೋಡೆಯ ಎತ್ತರ AB $= \sqrt{64} = 8$ ಅಡಿ

$\therefore$ ಆವರಣದ ಗೋಡೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 400*8 = 3,200 ಚದರ ಅಡಿಗಳು

ಪೈಂಟರನ ದರ ಚದರ ಅಡಿಗೆ 80 ರೂ.

$\therefore$ ಅವನಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಹಣ = 3,200*80= ರೂ.2,56,000

6.13.2 ಸಮಸ್ಯೆ 2: ಇನ್ನೊಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ಚೆಸ್ ಪಂದ್ಯವನ್ನಾಡಲು ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಿಂದ ನೀವು ಆಯ್ಕೆಯಾಗಿದ್ದೀರೆಂದು ಭಾವಿಸಿ. ನೀವು ಆ ಶಾಲೆಗೆ ಸೈಕಲಿನಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಹೋಗುತ್ತೀರಿ:
ನಿಮ್ಮ ಮನೆಯಿಂದ ಸೈಕಲಿನಲ್ಲಿ 8 ಕಿ.ಮಿ. ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ, 5 ಕಿ.ಮಿ. ಪೂರ್ವಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ, ಪುನಃ 4 ಕಿ.ಮಿ. ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಆ ಶಾಲೆಯನ್ನ ತಲಪುತ್ತೀರಿ. ಹಾಗಾದರೆ ನಿಮ್ಮ ಮನೆಯಿಂದ ಆ ಶಾಲೆಗಿರುವ ನೇರ ದೂರವನ್ನ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ನೀವು ಚಲಿಸಿದ ಮಾರ್ಗ $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$.

AB= 8 ಕಿ.ಮಿ., BC=5 ಕಿ.ಮಿ., CD=4 ಕಿ.ಮಿ.. ನಾವೀಗ DA ಯ ನೇರ ದೂರವನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಈಗ CB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ DE ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಅದು AB ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ E ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

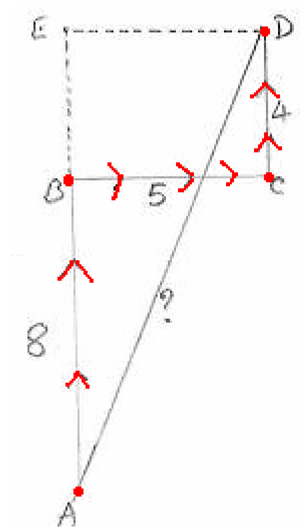
$DE \parallel BC$, $BE \parallel CD$. ಆದ್ದರಿಂದ, BCDE ಯು ಒಂದು ಆಯತ

$\therefore DE = 5,\ AE = AB + BE = 8 + 4 = 12 \quad (BE = CD)$

DEAಯು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

$\therefore AD^2 = AE^2 + ED^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

$\therefore$ AD= 13ಕಿ.ಮಿ (ನಿಮ್ಮ ಮನೆಯಿಂದ ಶಾಲೆಗೆ ಇರುವ ನೇರ ದೂರ)

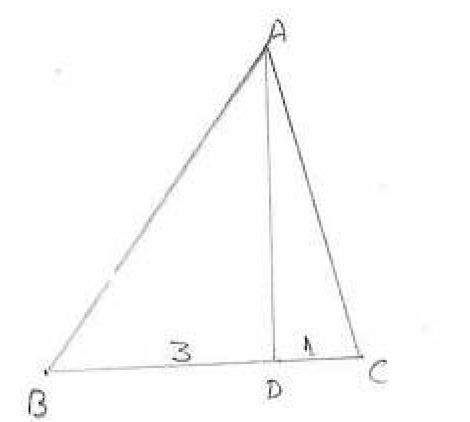


A project of www.eShale.org

6.13.2 ಸಮಸ್ಯೆ 3: $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ $AD \perp BC$, $DB:CD = 3:1$. ಆದರೆ, $BC^2 = 2(AB^2-AC^2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$BD^2 = AB^2-AD^2$	$\triangle ABD$ ಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ
2	$AC^2 = AD^2+CD^2$	$\triangle ADC$ ಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ
3	$\therefore AD^2 = AC^2-CD^2$	ಹಂತ 2 ರಿಂದ
4	$\therefore BD^2 = AB^2-(AC^2-CD^2)$ $= AB^2-AC^2+CD^2$	(1) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ
5	$\frac{DB}{CD} = 3$ $\therefore BC = BD+CD = 4CD$	ದತ್ತ
6	$\therefore DB=3CD \therefore BD^2=9CD^2$	
7	$\therefore 9CD^2 = AB^2-AC^2+CD^2$	(6) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ
8	$\therefore 8CD^2 = AB^2-AC^2$	
9	$\therefore 16CD^2 = 2(AB^2-AC^2)$	
11	$\therefore BC^2= 2(AB^2-AC^2)$	5 ರಲ್ಲಿ $[BC=4CD : BC^2 = 16CD^2]$



A Project of www.eShale.org

6.13.2 ಸಮಸ್ಯೆ 4: 32 ಮೊಳ ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಿದಿರು ಕಂಬ ವಾಯು ವೇಗದಿಂದ ಮುರಿದು, ಅದರ ತುದಿಯು ಅದರ ಬುಡಕ್ಕೆ 16 ಮೊಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಭೂಮಿಯಲ್ಲಿ ಬಿತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ ಬುಡದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಅದು ಮುರಿಯಿತು? ('ಲೀಲಾವತಿ' ಶ್ಲೋಕ 150)

ಪರಿಹಾರ:

AB ಯು 32 ಮೊಳ ಉದ್ದದ ಕಂಬ ಕಂಬವು D ಯಲ್ಲಿ ಮುರಿದು C ಯಲ್ಲಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿತು.

BC = 16 ಮೊಳ, AB = BD + DC = 32 ಮೊಳ

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$DC^2 = DB^2 + BC^2 = DB^2 + 16^2 = DB^2 + 256$

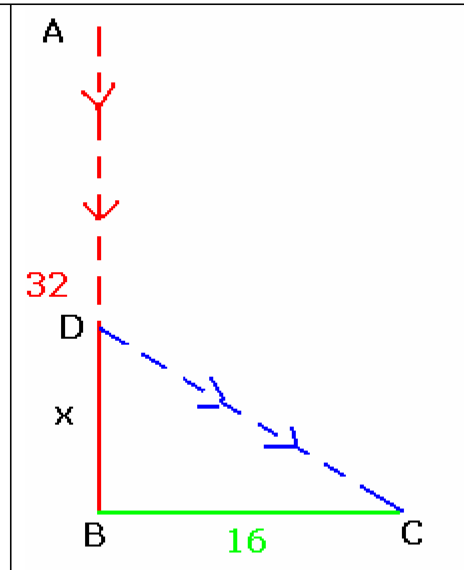
BD = x, DC = y ಆಗಿರಲಿ

$x + y = 32 \quad ----\rightarrow (1)$

$y^2 = x^2 + 256 \quad ----\rightarrow (2)$

(1)ರಿಂದ, $x + y = 32 \therefore y = 32 - x$

y ಯ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (2)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ,



$(32 - x)^2 = x^2 + 256$

$(32 - x)^2 = 32^2 + x^2 - 64x = 1024 + x^2 - 64x \{ (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab) \}$

$\therefore 1024 + x^2 - 64x = x^2 + 256$

$\therefore 768 = 64x \therefore x = 12$

$\therefore$ ಕಂಬವು ನೆಲದಿಂದ 12 ಮೊಳ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಮುರಿದಿದೆ.

ತಾಳೆ: $x = 12$, $y = 32 - 12 = 20$: $400 = 20^2 = 144 + 256 = 12^2 + 16^2$

A Project of www.eShale.org

6.13.2 ಸಮಸ್ಯೆ 5:100 ಮೊಳ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಮರದ ತುದಿಯಿಂದ ಒಂದು ಕಪಿಯು ಕೆಳಗೆ ಇಳಿದು 200 ಮೊಳ ದೂರವಿರುವ ಸರೋವರಕ್ಕೆ ಹೋಯಿತು. ಇನ್ನೊಂದು ಕಪಿಯು ಮರದ ತುದಿಯಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ಮೇಲೆ ಜಿಗಿದು ಕರ್ಣದ ಮಾರ್ಗವಾಗಿ ಅದೇ ಸರೋವರನ್ನು ಮುಟ್ಟಿತು. ಆ ಎರಡೂ ಕಪಿಗಳು ಒಂದೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿದ್ದರೆ ಎರಡನೇ ಕಪಿಯು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರ ಹಾರಿತು ಎಂದು ತಿಳಿಸಿ.('ಲೀಲಾವತಿ' ಶ್ಲೋಕ 157)

ಪರಿಹಾರ:

BD ಯು 100 ಮೊಳ ಎತ್ತರವಿರುವ ಮರ. C ಯು B ಯಿಂದ 200 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಸರೋವರ.

ಕಪಿಯು ಜಿಗಿದ ಎತ್ತರ x ಇರಲಿ.

ಮೊದಲ ಕಪಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ = DB+BC= 100+200=300

ಇನ್ನೊಂದು(ಜಿಗಿದ) ಕಪಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ= DA+AC = x+AC

ಇವೆರಡೂ ಒಂದೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿದೆ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$\therefore$ x+AC=300 $\therefore$ AC= 300-x

$\therefore AC^2 = (300-x)^2 = 90,000-600x+x^2$ -------- (1)

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

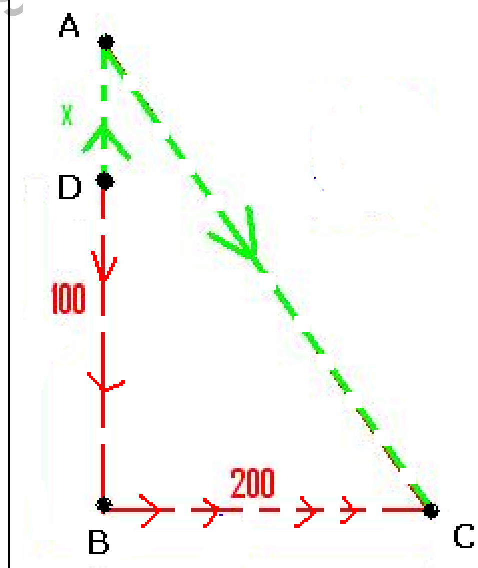
$AC^2 = BA^2+BC^2 = (100+x)^2+200^2$

$= 10,000+200x+x^2+40,000$ ---------(2)

ಸಮೀಕರಣ 1,2 ರಿಂದ,

$10,000+200x+x^2+40,000 = 90,000-600x+x^2$

$\therefore$ 800x = 40,000 $\therefore$ x=50 ಮೊಳ(ಎರಡನೇ ಕಪಿಯು ಹಾರಿದ ಎತ್ತರ)



ತಾಳೆ: $AC^2 = (100+50)^2+200^2 = 22,500+40,000 = 62,5000 = 250^2$: 100+200 = 50+ 250

A Project of www.eShale.org

6.13.2 ಸಮಸ್ಯೆ 6: 9 ಮೊಳ ಎತ್ತರವಿರುವ ಕಂಬದ ಬುಡದಲ್ಲಿ ಹುತ್ತವಿದೆ. ಕಂಬದ ತುದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ನವಿಲು ಕುಳಿತಿದೆ. ಕಂಬದಿಂದ, ಕಂಬದ ಎತ್ತರದ ಮೂರರಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಹುತ್ತಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಿರುವ ಹಾವನ್ನು ನೋಡಿ ಅದನ್ನು ತಿನ್ನಲು ನವಿಲು ಕಂಬದ ತುದಿಯಿಂದ ಹಾರುತ್ತದೆ. ಅವೆರಡೂ ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಹೊರಟರೆ ಹುತ್ತದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಅವೆರಡರ ಸಮಾಗಮವಾಗುವುದು ?('ಲೀಲಾವತಿ' ಶ್ಲೋಕ 152)

ಪರಿಹಾರ:

AB ಯು 9 ಮೊಳ ಎತ್ತರದ ಕಂಬ. A ನಲ್ಲಿ ನವಿಲು ಕುಳಿತಿದೆ. D ಯು ಕಂಬದಿಂದ 27 ಮೊಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಹಾವು. ನವಿಲು ಹಾವನ್ನು ಹಿಡಿಯಲು ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ ಮಾರ್ಗವನ್ನು (AC) ಅನುಸರಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. C ಯು ನವಿಲು ಹಾವಿನ ಮೇಲೆ ಎರಗುವ ಸ್ಥಳ. BC = x ಇರಲಿ .

$\therefore$ CD=27-x

ನವಿಲೂ, ಹಾವೂ ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ AC=CD.

$\therefore AC = 27-x \therefore AC^2 = (27-x)^2 = 729-54x+x^2$ ------- (1)

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

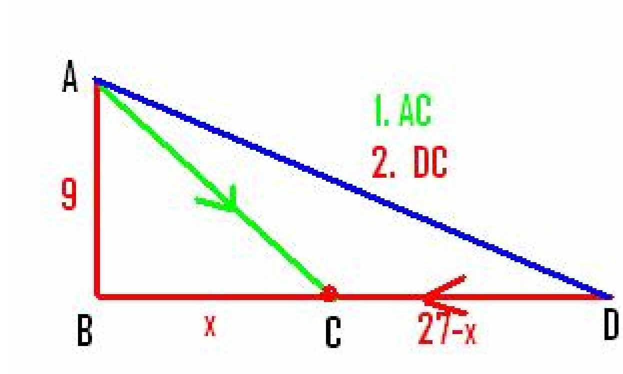
$AC^2 = BA^2+BC^2 = (9)^2+x^2 = 81+x^2$ ---------(2)

ಸಮೀಕರಣ 1,2 ರಿಂದ,

$729-54x+x^2 = 81+x^2$

$\therefore 729-81 = 54x \quad \therefore x = \frac{648}{54} = 12$ ಮೊಳ(ನವಿಲು ಮತ್ತು ಹಾವು, ಕಂಬದ ಬುಡದಿಂದ ಸಮಾಗಮವಾದ ದೂರ)

ತಾಳೆ: $AC^2 = (27-12)^2 = 9^2 + 12^2$ ($\because$ 225 = 81+144)



A Project of www.eShale.org

6.13.2 ಸಮಸ್ಯೆ 6: ಒಂದು ಸರ್ಕಸ್ ಕಂಪೆನಿಯ ಡೇರೆ ಕಟ್ಟಲು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ 11 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರದ ಕಂಬವನ್ನ ನೆಟ್ಟಿತು. ಈ ಕಂಬದ ಬುಡದಿಂದ 12 ಮಿ. ದೂರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಾಕಾರವಾಗಿ 6 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರದ ಕೆಲವು ಕಂಬಗಳನ್ನ ನೆಟ್ಟರು. ಈ ಕಂಬಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನ ಮಧ್ಯ ಕಂಬದ ತುದಿಗೆ ಕಟ್ಟಿದರೆ, ಇದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಹಗ್ಗದ ಉದ್ದವನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಕಂಬಗಳನ್ನ ನೆಟ್ಟ ಕ್ರಮವನ್ನ ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

BD ಯು ಮಧ್ಯದ ಕಂಬ = 11 ಮೀ., AC ಯು ಆಧಾರದ ಕಂಬ = 6 ಮೀ.

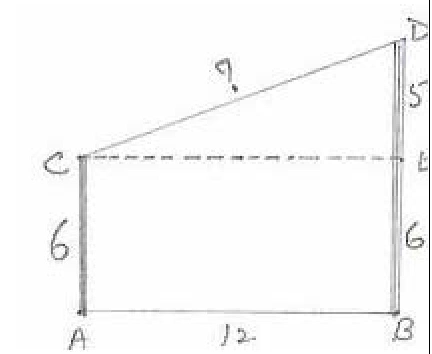
BD ಕಂಬದಿಂದ AC ಕಂಬಕ್ಕಿರುವ ದೂರ: AB = 12 ಮೀ.

ನಾವೀಗ DC ಯ ಉದ್ದವನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

C ಯಿಂದ AB ಗೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ ಅದು BD ಯನ್ನ E ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

ABEC ಯು ಒಂದು ಆಯತ. CE=12 BE=AC=6 $\therefore$ ED=5

CED ಯು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ.



ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$DC^2 = CE^2+ED^2= 12^2+5^2=144+25 =169 = 13^2 \therefore CD = 13$ ಮಿ.

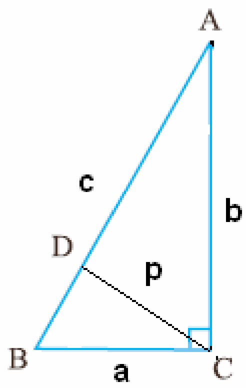
ಮಧ್ಯದ ಕಂಬಕ್ಕೆ ಇತರ ಕಂಬಗಳನ್ನ ಕಟ್ಟಲು ಬೇಕಾದ ಹಗ್ಗದ ಉದ್ದ = 13 ಮಿ.

A Project of www.eShale.org

6.13.2 ಸಮಸ್ಯೆ 7: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle ACB = 90^0$ AB=c, BC=a,AC=b, $\angle CDB = 90^0$, CD =p ಆದರೆ $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$AB^2 = AC^2+BC^2$	ΔACB ಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ
2	$c^2 = b^2+a^2$	
3	$\frac{1}{2}AB*CD = \frac{1}{2}cp$	ΔACB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (BC ಪಾದ)
4	$\frac{1}{2}AC*BC = \frac{1}{2}ba$	ΔACB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (AC ಪಾದ)
5	$\frac{1}{2}cp = \frac{1}{2}ba$	ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಒಂದೇ
6	$c = \frac{ab}{p}$	
7	$\frac{a^2b^2}{p^2} = b^2+a^2$	c ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು 2 ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದೆ.
8	$\frac{1}{p^2} = \frac{b^2+a^2}{a^2b^2}$	
9	$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$	



A Project of www.eShale.org