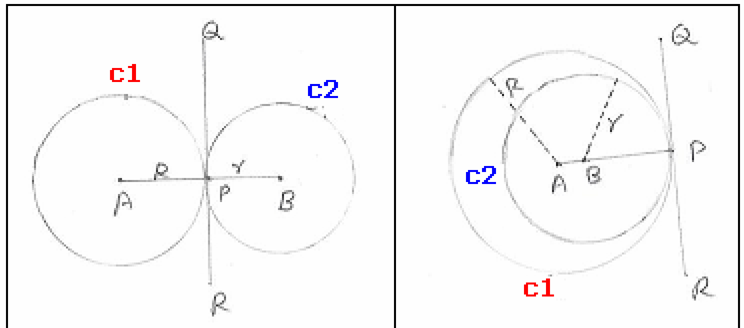
6.14 ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳು :

ಪ್ರಮೇಯ: ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದಾಗ, ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಗಳು ಸರಳ ರೇಖಾಗತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



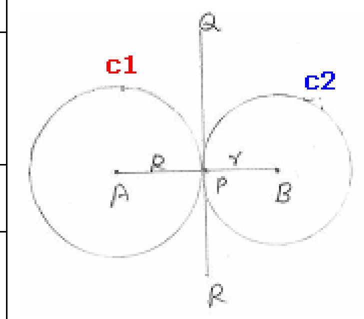
ಚಿತ್ರ 1 | ಚಿತ್ರ 2

ದತ್ತ: A ಮತ್ತು B ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ (ಚಿತ್ರ 1 ರಂತೆ) ಅಥವಾ ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿ (ಚಿತ್ರ 2 ರಂತೆ) ಸ್ಪರ್ಶಿಸಬಹುದು.

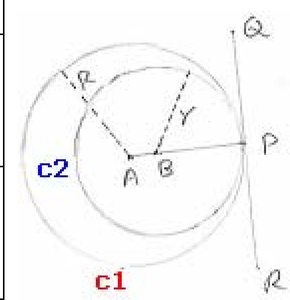
ಸಾಧನೀಯ: A, B ಮತ್ತು P ಗಳು ಸರಳ ರೇಖಸ್ಥ ಬಿಂದುಗಳು

ರಚನೆ: ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕ RPQ ವನ್ನೆಳೆದಿದೆ. AP ಮತ್ತು BP ಗಳನ್ನ ಸೇರಿಸಿದೆ.

ಸಾಧನೆ:(ಬಾಹ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶವಾದಾಗ)

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು	
1	$\angle APQ = 90^0 = \angle BPQ$	RQ ವು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ P ಯಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕ, AP ಮತ್ತು BP ಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು	
2	$\angle APQ + \angle BPQ = 180^0$	1 ರಿಂದ	
3	APBಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ	2 ರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳು.	
∴ A, B ಮತ್ತು Pಗಳು ಸರಳ ರೇಖಸ್ಥ ಬಿಂದುಗಳು			

ಸಾಧನೆ: (ಅಂತಸ್ಥ ಸ್ಪರ್ಶವಾದಾಗ)

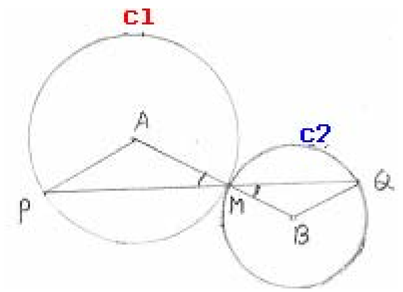
ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು	
1	AP ಮತ್ತು BP ಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆ RQ ಗೆ ಲಂಬಗಳು	RQ ವು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ P ಯಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕ, AP ಮತ್ತು BP ಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು	
2	B ಯು AP ಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು		
3	ABP ಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ		
∴ A, B ಮತ್ತು P ಗಳು ಸರಳ ರೇಖಸ್ಥ ಬಿಂದುಗಳು			

6.14 ಸಮಸ್ಯೆ 1: ದತ್ತ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನಂತೆ A ಮತ್ತು B ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯು ಆ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. AP ಮತ್ತು BQ ಸಮಾಂತರ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಕೇಂದ್ರಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. ಈಗ ನಾವು AP || BQ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	AM=AP	ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು
2	$\angle$APM = $\angle$AMP	ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ 2 ಕೋನಗಳು ಸಮ.
3	$\angle$AMP= $\angle$QMB	ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು
4	BM=BQ	ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು
5	$\angle$QMB = $\angle$BQM	ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ 2 ಕೋನಗಳು ಸಮ.
6	$\angle$APM = $\angle$BQM	2, 3, 5 ರಿಂದ,



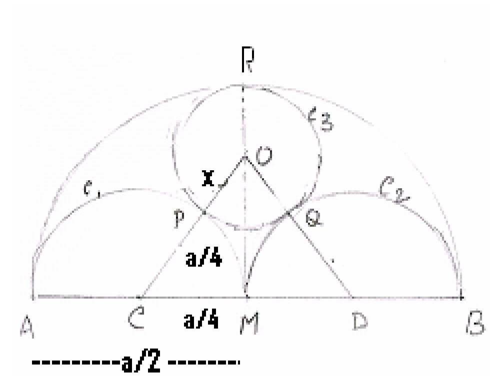
ಆದರೆ ಈ ಕೋನಗಳು AP ಮತ್ತು BQ ಗಳನ್ನ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು.
ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ, AP || BQ

6.14 ಸಮಸ್ಯೆ 2: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB ಯು ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ. M ಎಂಬುದು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ AB,AM ಮತ್ತು MB ಗಳು ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಮೂರು ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳನ್ನೆಳೆದಿದೆ. 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಈ ಮೂರೂ ವೃತ್ತಗಳನ್ನ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $\frac{1}{6}$AB ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ x ಆಗಿರಲಿ. OR=OP =x, AB=a ಆಗಿರಲಿ

$\therefore$ CP = CM= $\frac{a}{4}$, MR= $\frac{a}{2}$

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು	
1	OMCಯು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ	OM ಎಂಬುದು C_1 ವೃತ್ತಕ್ಕೆ M ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ	
2	$OC^2 = MC^2 + OM^2$	Δ OMC ಗೆ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ.	
3	ಎಡಭಾಗ $= (x+\frac{a}{4})^2$ $= x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16}$	OC = OP+PC = $x + \frac{a}{4}$	
4	ಬಲಭಾಗ $= \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4} - ax + x^2$	MC= $\frac{a}{4}$,OM = MR-OR= $\frac{a}{2} - x$	
5	$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16} = \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4} - ax + x^2$ (ಎಡಭಾಗ = ಬಲಭಾಗ)		
6	$3\frac{ax}{2} = \frac{a^2}{4}$ $\therefore$ $x = \frac{a}{6}$ ಅಂದರೆ OP $= \frac{1}{6}$AB		

6.14 ಪ್ರಮೇಯ: ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು

(i) ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(ii) ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯೊಡನೆ ಸಮನಾದ ಕೋನವನ್ನ ಮತ್ತು

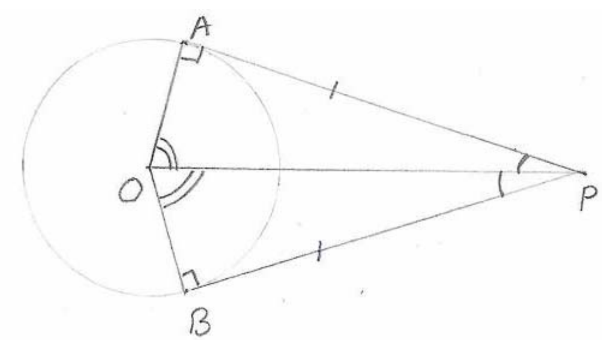
(iii) ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮವಾದ ಕೋನವನ್ನ ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ PA ಮತ್ತು PB ಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.

ಸಾಧನೀಯ::

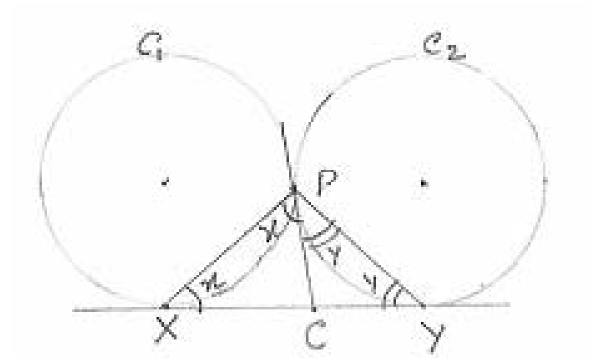
(i) $PA=PB$ (ii) $\angle APO = \angle BPO$ (iii) $\angle AOP = \angle BOP$

ಸಾಧನೆ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು	
1	$OA = OB$	ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು	
2	$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$	PA ಮತ್ತು PB ಗಳು A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು, AO ಮತ್ತು BO ಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು.	
3	OP ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು.	ΔAOP, ΔBOP ಗಳಿಗೆ	
4	$\Delta AOP \cong \Delta BOP$	ಲಂ.ಕ.ಬಾ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ	
5	$PA=PB$	ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು	
6	$\angle APO = \angle BPO$	ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು	
7	$\angle AOP = \angle BOP$	ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು	

6.14 ಸಮಸ್ಯೆ 3: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ XY ಮತ್ತು PC ಗಳು 2 ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. $\angle XPY = 90$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

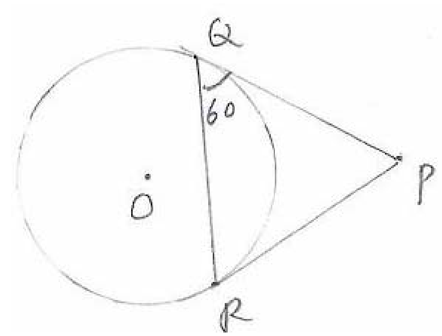
ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು	
1	$CX = CP$	CX ಮತ್ತು CPಗಳು C ಬಿಂದುವಿನಿಂದ C_1 ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.	
2	$\angle CXP = \angle CPX = x^0$	Δ CXP ಯಲ್ಲಿ 2 ಬಾಹುಗಳು ಸಮ.	
3	$CY = CP$	CY ಮತ್ತು CP ಗಳು C ಬಿಂದುವಿನಿಂದೆಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.	
4	$\angle PYC = \angle CPY = y^0$	2 ಬಾಹುಗಳು ಸಮ. ಅಂದರೆ	
5	$\angle CXP + \angle XPC + \angle CPY + \angle PYC = 180^0$ (Δ PXY ಯ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು)		
6	$\therefore\ x^0+x^0+y^0+y^0 = 180^0 \therefore\ 2(x^0+y^0) = 180^0$		
7	ಅಂದರೆ $(x^0+y^0) = \angle XPY = 90^0$		

6.14 ಸಮಸ್ಯೆ 4: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು Pಯಿಂದ PQ ಮತ್ತು PR ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನೆಳೆದಿದೆ. $\angle PQR = 60^0$ ಆದರೆ, ಜ್ಯಾ QR ನ ಉದ್ದವು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

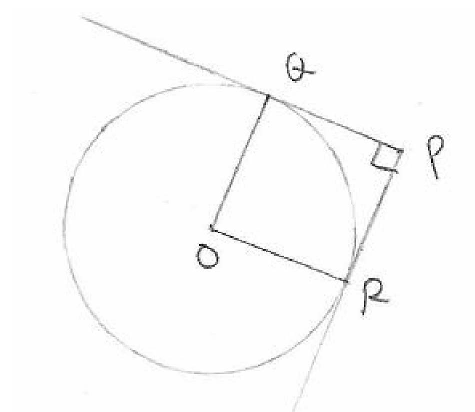
ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	PQ=PR	PQ ಮತ್ತು PRಗಳು P ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.
2	$\angle PQR = \angle PRQ$	2 ಬಾಹುಗಳು ಸಮ.
3	$\angle PQR = 60^0$	ದತ್ತ
4	$\angle PQR = \angle PRQ = 60^0$	2,3 ರಿಂದ
5	PQR ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನ	4 ರಿಂದ
6	PQ=PR=QR	



6.14 ಸಮಸ್ಯೆ 5: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ PQ ಮತ್ತು PR ಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $\angle QPR = 90^0$ ಆದರೆ PQOR ಒಂದು ವರ್ಗ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

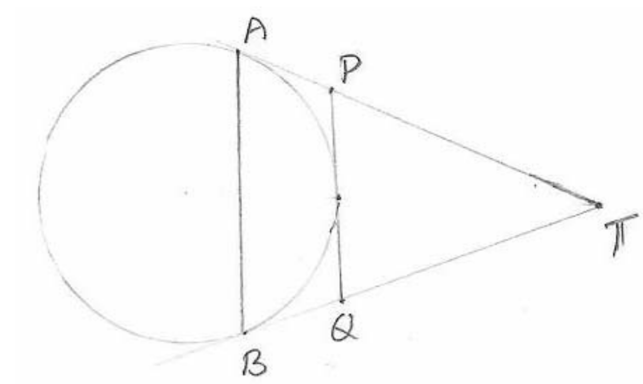
ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\angle OQP = 90^0 = \angle ORP$	PQ ಮತ್ತು PR ಗಳು P ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.
2	$\angle QPR = 90^0$	ದತ್ತ
3	OQ || PR	
4	$\angle QOR = 360^0 - \angle OQP - \angle QPR - \angle ORP$ $= 360^0 - 90^0 - 90^0 - 90^0 = 90^0$	
5	OR || QP	
6	PQOR ಸ.ಚ.ಭು.	3 ಮತ್ತು 5 ರಿಂದ
7	OQ=PR, OR=PQ	ಸ.ಚ.ಭು. ದ ಲಕ್ಷಣ
8	OQ =OR	ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು
9	OQ =PR=OR=PQ	7 ಮತ್ತು 8 ರಿಂದ
10	PQOR ಒಂದು ವರ್ಗ	



6.14 ಸಮಸ್ಯೆ 6: O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ AT ಮತ್ತು BT ಗಳು T ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು TP=TQ ಆಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ PQ ವನ್ನ ಎಳೆದಿದೆ. $\triangle$TAB ||| $\triangle$TPQ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

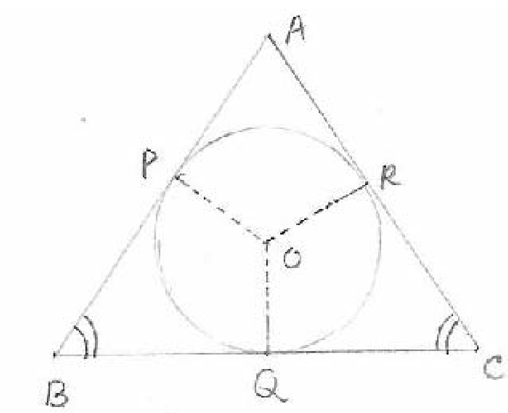
ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	AT=BT	TA, TBಗಳು T ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು
2	$\angle$TAB=$\angle$TBA	2 ಬಾಹುಗಳು ಸಮ.
3	PT=QT	ದತ್ತ
4	$\angle$TPQ=$\angle$TQP	2 ಬಾಹುಗಳು ಸಮ.
5	$\angle$ATB=180^0-($\angle$TAB+$\angle$TBA) = 180^0- 2$\angle$TAB	$\triangle$TAB ಯಲ್ಲಿ 3 ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0
6	$\angle$ATB= 180^0($\angle$TPQ+$\angle$TQP) = 180^0- 2$\angle$TPQ	$\triangle$TPQ ಯಲ್ಲಿ 3 ಈ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0
7	$\angle$TAB =$\angle$TPQ	5 ಮತ್ತು 6 ರ ಬಲಭಾಗ ಹೋಲಿಸಿ.
8	$\angle$TAB =$\angle$TPQ=$\angle$TQP =$\angle$TBA (7, 4, 2 ರಿಂದ)	
9	$\triangle$TAB ||| $\triangle$TPQ	ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕೋನೀಯವಾಗಿವೆ.



6.14 ಸಮಸ್ಯೆ 7: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ A,B,C ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. AP+BQ+CR =BP+CQ+AR ಮತ್ತು AP+BQ+CR = $\frac{1}{2} * \Delta$ABC ಯ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಮತ್ತು AB=AC ಆದರೆ, BQ=QC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

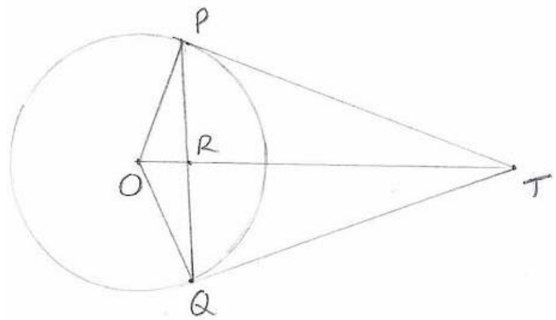
ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	PA=AR	Aಯಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು
2	BQ=BP	Bಯಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು
3	CR=CQ	Cಯಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು
4	PA+BQ+CR =AR+BP+CQ	1+2+ 3ರಿಂದ
5	AB=AP+PB, BC=BQ+QC,AC=AR+RC	
6	$\therefore$ AB+BC+AC = AP+PB+BQ+QC+CR+RA =AP+BQ+BQ+CR+AP+CR = 2 (AP+BQ+CR) = Δ ABC ಯ ಸುತ್ತಳತೆ $\therefore \frac{1}{2} \Delta$ ABC ಯ ಸುತ್ತಳತೆ =(AP+BQ+CR)	
7	AB=AC	ದತ್ತ
8	$\therefore$ AP+PB=AR+RC	
9	PB=RC	1 ಮತ್ತು 8 ರಿಂದ
10	BQ=CQ	2,9 ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ



6.14 ಸಮಸ್ಯೆ 8: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ TP ಮತ್ತು TQ ಗಳು ‘O’ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಆದರೆ,

1. OT ಯು PQ ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
2. $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:



ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
	ΔTPR ಮತ್ತು ΔTQRಗಳಲ್ಲಿ	
1	$TP = TQ$, $\angle PTR = \angle QTR$	ಪ್ರಮೇಯ (TP, TQಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)
2	TR ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು	
3	$\Delta TPR \cong \Delta TQR$	ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ
4	$PR = RQ$ ಮತ್ತು $\angle PRT = \angle QRT$	
5	$\angle PRT + \angle TRQ = 180^0$ $\therefore \angle PRT = 90^0$ $\therefore$ OT ಯು PQ ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ	4 ರಿಂದ
6	$\angle PTR + \angle RPT = 90^0$	ΔPRT ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದೆರಡು ಕೋನಗಳು
7	$\angle OPT = 90^0 = \angle OPR + \angle RPT$	PT ಸ್ಪರ್ಶಕ, OP ತ್ರಿಜ್ಯ, $\angle P = 90^0$
8	$\angle PTR = \angle OPR$	6 ಮತ್ತು 7 ರಿಂದ
9	$\angle PTQ = 2\angle PTR$	1ರಿಂದ
10	$\angle PTQ = 2\angle OPR$	8 ರಿಂದ