## 8.2 ವಿಶೇಷ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಕೋನ $90^0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $90^0$ ಆಗಿರಲೇ ಬೇಕು.
ವಿಶೇಷ ಲಘುಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ ($60^0$ $30^0$) ಮತ್ತು ($45^0$ ,$45^0$) ಆಗಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ.

### 1. ವಿಶೇಷ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ ($45^0$ ,$45^0$):

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ A = $45^0$ ಆಗಿದೆ. ಅದುದರಿಂದ C = $45^0$. ( ಅವೆರಡರ ಮೊತ್ತ $90^0$ ಆಗಿರಲೇ ಬೇಕು)

ಆದುದರಿಂದ ABC ಯು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದ್ದು AB=BC ಆಗಿದೆ. AB =a ಆಗಿರಲಿ

$AC^2 = AB^2+BC^2 = 2a^2$ (ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)

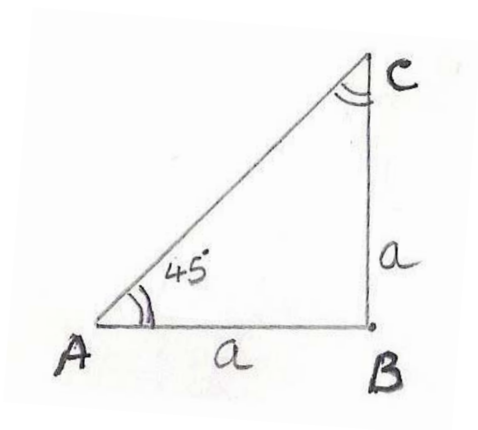
$\therefore AC = \sqrt{2}a$

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ

sin A = sin 45 = ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ÷ ವಿಕರ್ಣ $= \frac{BC}{AC} = \frac{a}{(\sqrt{2})a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

cos A = cos 45 = ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು ÷ ವಿಕರ್ಣ $= \frac{AB}{AC} = \frac{a}{(\sqrt{2})a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

tan A = tan 45 = ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ÷ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು $= \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$



**2. ವಿಶೇಷ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ ($60^0$, $30^0$):**

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆ 2a ಇರುವ ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. C ಯಿಂದ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ CD ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ABC ಯು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$

ಹಾಗೂ $\angle ACD = 30^0$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

($\because$ ADC ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ = $180^0$)

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$\therefore DC^2 = AC^2 - AD^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2 \therefore CD = \sqrt{3}a$

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ:

$\sin A = \sin 60 = O/H = \frac{CD}{AC} = \frac{(\sqrt{3})a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

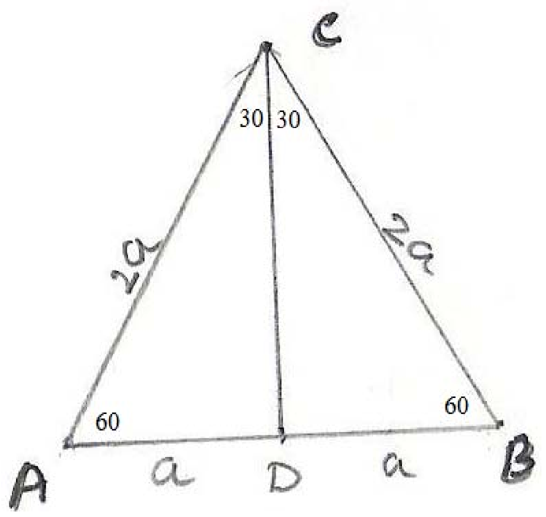
$\cos A = \cos 60 = A/H = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\tan A = \tan 60 = O/A = \frac{CD}{AD} = \frac{(\sqrt{3})a}{a} = \sqrt{3}$

$\sin ACD = \sin 30 = O/H = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\cos ACD = \cos 30 = A/H = \frac{CD}{AC} = \frac{(\sqrt{3})a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan ACD = \tan 30 = O/A = \frac{AD}{CD} = \frac{a}{(\sqrt{3})a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



**3. ವಿಶೇಷ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ ($0^0$ ,$90^0$):**

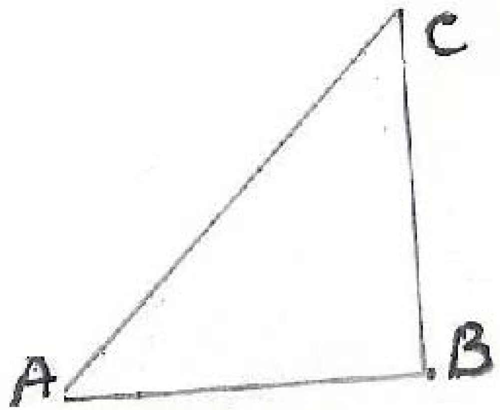
ಕೋನ A $90^0$ ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ (ವಿಕರ್ಣ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಾದಂತೆ ) ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ಒಂದೇ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 0 ಆಗುತ್ತದೆ.

∴ sin90 = **O / H** = 1, cos90 = **A / H** =0 ಮತ್ತು

tan90 = **O / A** = ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ÷ 0 (ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ)

ಕೋನ A $0^0$ ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ (ವಿಕರ್ಣ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು ವಾದಂತೆ ) ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುವಿನ ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ಒಂದೇ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 0 ಆಗುತ್ತದೆ.

∴ sin 0 = **O / H** = 0 , cos0 = **A / H** =1 ಮತ್ತು tan 0 = **O / A** = 0




ವಿಶೇಷ ಕೋನಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

| **ಕೋನ=>** | **$0^0$** | **$30^0$** | **$45^0$** | **$60^0$** | **$90^0$** |
|---|---|---|---|---|---|
| **ಅನುಪಾತ↓** | **ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆ ↓** | | | | |
| sin(Angle) = | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos(Angle) = | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan(Angle) = | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ |
| cosec(Angle) = | ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1 |
| sec(Angle) = | 1 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ |
| cot(Angle) = | ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |

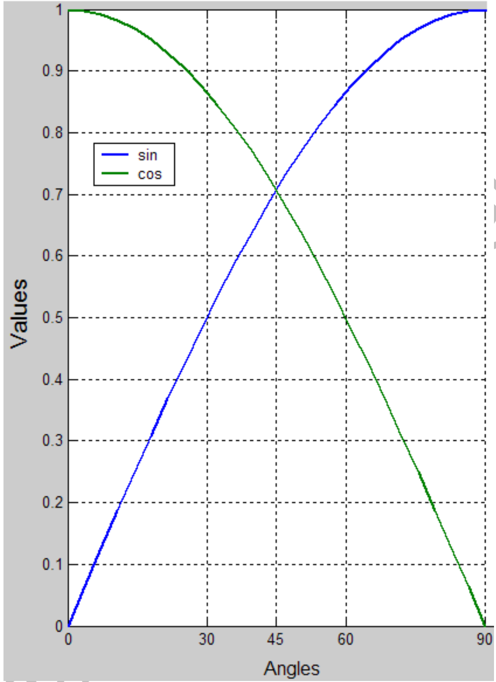
$\theta$ = 0, $30^0$,$45^0$,$60^0$ ಮತ್ತು $90^0$ ಆದಾಗ ಅವುಗಳ **sin**, **cos** ಮತ್ತು **tan** ಬೆಲೆಗನುಸಾರವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಮೊದಲ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ **ಸೈನ್** ಮತ್ತು **ಕಾಸ್** ಗಳ ನಕ್ಷೆಯಿದ್ದು ಅವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ನೀಲಿ ಮತ್ತು **ಹಸರು** ಬಣ್ಣದ ರೇಖೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಎರಡನೇ ನಕ್ಷೆಯು **ಟ್ಯಾನ್** ನದ್ದು ಆಗಿದೆ.

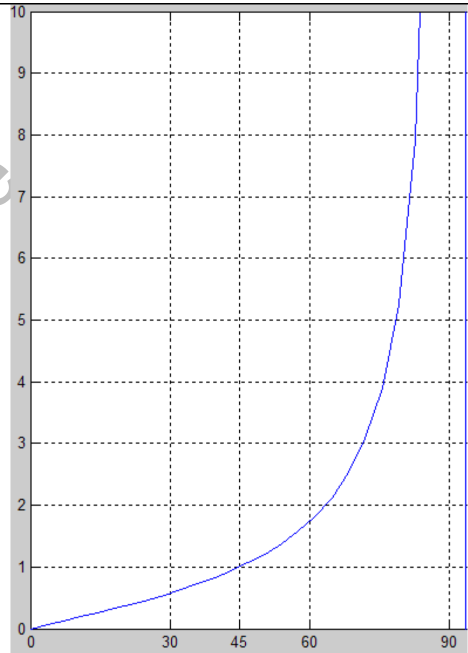
**ಗಮನಿಸಿ:**

1. ಕೋನದ ಡಿಗ್ರಿ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಅದರ **ಸೈನ್** ಬೆಲೆಯು 0 ಯಿಂದ 1 ರ ವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.
2. ಕೋನದ ಡಿಗ್ರಿ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಅದರ **ಕಾಸ್** ನ ಬೆಲೆಯು 1 ರಿಂದ 0 ಯ ವರೆಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.
3. ಕೋನದ ಡಿಗ್ರಿ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಅದರ **ಟ್ಯಾನ್** ನ ಬೆಲೆಯು 0 ಯಿಂದ ಅನಂತದ ವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

**Graph of sin($\theta$) and cos($\theta$)**




**Graph for tan($\theta$)**



**8.2 ಸಮಸ್ಯೆ 1:** ಯಾವುದೇ ಕೋನಕ್ಕೂ ಕೆಳಗಿನವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ

1. $\sin^2A+\cos^2A=1$
2. $\sec^2A-\tan^2A=1$
3. $\operatorname{cosec}^2A-\cot^2A=1$

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ:

| | |
|---|---|
| 1 | $\sin^2A+\cos^2A$<br>= (ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು÷ವಿಕರ್ಣ)$^2$+ (ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು÷ವಿಕರ್ಣ)$^2$<br>= (ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು$^2$+ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು$^2$) ÷ ವಿಕರ್ಣ$^2$<br>= (ವಿಕರ್ಣ$^2$) ÷ ವಿಕರ್ಣ$^2$ [ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ (ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು$^2$+ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು$^2$) = ವಿಕರ್ಣ$^2$ ] =1 |
| 2 | $\sec^2A-\tan^2A$ = (ವಿಕರ್ಣ ÷ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು)$^2$-( ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ÷ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು)$^2$<br>= (ವಿಕರ್ಣ$^2$ - ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು$^2$) ÷ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು$^2$<br>= ((ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು$^2$+ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು$^2$ )- ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು$^2$) ÷ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು$^2$ ( ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)<br>= ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು$^2$ ÷ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು$^2$ =1 |
| 3 | $\operatorname{cosec}^2A-\cot^2A$<br>= (ವಿಕರ್ಣ ÷ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು)$^2$-( ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು ÷ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು)$^2$<br>= (ವಿಕರ್ಣ$^2$ - ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು$^2$) ÷ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು$^2$<br>= (ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು$^2$+ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು$^2$) - ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು$^2$) ÷ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು$^2$ (ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)<br>= ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು$^2$ ÷ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು$^2$ =1 |

ಅಭ್ಯಾಸ : A $30^0$, $45^0$, $60^0$ ಆದಾಗ sin, cos, sec, tan, cosec, cot ಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡಿ ಸಮಸ್ಯೆ 8.2.1 ಯಲ್ಲಿನ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

**8.2 ಸಮಸ್ಯೆ 2:** ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಧಿಸಿ:

1. sin(A+B) =1= sinAcosB+cosAsinB
2. cos(A+B) =0= cosAcosB-sinAsinB

ಪರಿಹಾರ:

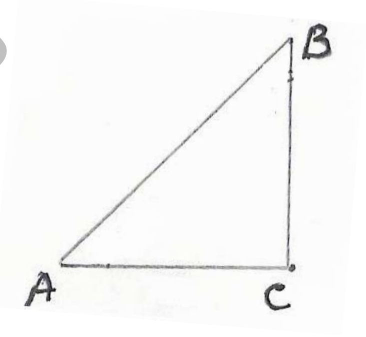
RHS =sinAcosB+CosAsinB

$$= \frac{BC}{AB} * \frac{BC}{AB} + \frac{AC}{AB} * \frac{AC}{AB} = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1$$ ( ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ $A+B = 90^0$

$\therefore$ sin(A+B) = sin90 = 1

ಇದು ಮೊದಲನೆಯ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಎರಡನೆಯ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.






ಅಭ್ಯಾಸ : (A,B) = $(60^0, 30^0)$, $(30^0, 60^0)$, $(0^0, 90^0)$ ಆದಾಗ ಸಮಸ್ಯೆ 8.2.2 ನಲ್ಲಿನ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ:

sinA*sinA = $\sin^2$A.

cosA*cosA = $\cos^2$A
tanA*tanA = $\tan^2$A
sinA*CosA= sinAcosA

**8.2 ಸಮಸ್ಯೆ 3:** A = $30^0$ ಆದರೆ cos 2A = $\cos^2A - \sin^2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**

A = $30^0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ 2A = $60^0$

$\therefore \cos 2A = \cos 60 = \frac{1}{2}$ ----→(1)

$\cos^2 A = (\cos A)^2 = (\cos 30)^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3/4$

$\sin^2 A = (\sin 30)^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore \cos^2A - \sin^2A = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ----→(2)

$\tan^2A = (\tan 30)^2 = (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{(1-\frac{1}{3})}{(1+\frac{1}{3})}$

$= \frac{(\frac{2}{3})}{(\frac{4}{3})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ -----→(3)

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ $\cos 2A = \cos^2A - \sin^2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

**8.2 ಸಮಸ್ಯೆ 4:** ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ A ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2sinAcos A –cos A-2sinA+1=0

ಪರಿಹಾರ:

2sin Acos A –cos A-2sinA+1 =0
cos A(2sinA-1) –(2sinA-1)=0
(2sinA-1)(cos A-1)=0
$\therefore$ (2sinA-1) =0 ಅಥವಾ (cos A-1)=0

ಅಂದರೆ sin A $=\frac{1}{2}$ ಅಥವಾ Cos A =1

$\therefore$ A=30 ಅಥವಾ A=0 ( $\because$ sin $30^0 = \frac{1}{2}$, Cos $0^0$ =1)

***ತಾಳೆ:***

A =30 ಆದಾಗ

2sin Acos A –cos A-2sinA+1 = 2sin30cos30 –cos30 -2sin30+1

$= 2*(\frac{1}{2})*(\frac{\sqrt{3}}{2}) - (\frac{\sqrt{3}}{2}) -2*(\frac{1}{2}) +1$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ -1+1=0 ಹೀಗೆಯೇ A=0 ಆದಾಗ ತಾಳೆನೋಡಿ.

**8.2 ಸಮಸ್ಯೆ 5:** $\sin^2 60 + \cos^2 (3x-9) = 1$ ಆದಾಗ x ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ $\cos^2 (3x-9) = 1 - \sin^2 60$

$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$\sin^2 60 = \frac{3}{4}$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\cos^2 (3x-9) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$

$\cos(3x-9) = \frac{1}{2}$

$\cos 60 = \frac{1}{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$\therefore 3x-9 = 60$

i.e. $3x = 60+9 = 69$

$\therefore\ x = 23$

*ತಾಳೆ:*

$x=23$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$\cos^2 (3x-9) = \cos^2 (69-9) = \cos^2 (60) = (\cos 60)^2 = (\frac{1}{2})^2 = 1/4$

$\therefore \sin^2 60 + \cos^2 (3x-9) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1 =$ RHS

**8.2 ಸಮಸ್ಯೆ 6:** ತ್ರಿಜ್ಯ 2cm ಇರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ $40^0$ ಕೋನ ಇರುವಂತೆ, ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವಿಗೂ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿಗೂ ಇರುವ ನಡುವಣ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ(sin 20 = 0.342 ಎನ್ನುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

**ಸುಳಿವು:**

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಕರಡು ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ.

1. OA ಮತ್ತು OP ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ
2. $\angle OAP = 90^0$ ಆಗಿದ್ದು PO ವು $\angle APB$ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕ (ಪಾಠ 6.14 ರ ಪ್ರಮೇಯಗಳು)
3. sin 20 = 0.342 ಎನ್ನುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, PO ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ