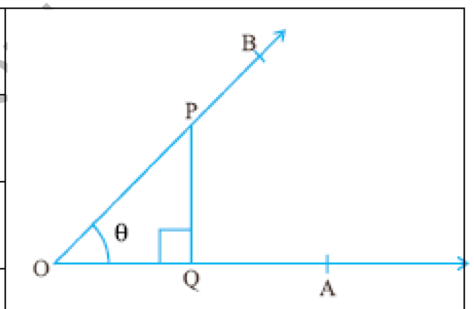
8.4 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

8.4.1 ಮೂಲ ಸಂಬಂಧಗಳು

ಈ ಹಿಂದೆ ಕಲಿತಂತೆ:

$\sin\theta$	ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು/ವಿಕರ್ಣ	$= \frac{PQ}{OP}$; $\text{Cosec}\theta = \frac{1}{Sin\theta} = \frac{OP}{PQ}$
$\cos\theta$	ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು/ವಿಕರ್ಣ	$= \frac{OQ}{OP}$; $\sec\theta = \frac{1}{Cos\theta} = \frac{OP}{OQ}$
$\tan\theta$	ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು/ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು $= \frac{Sin\theta}{Cos\theta}$	$= \frac{PQ}{OQ}$; $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{OQ}{PQ}$



ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ $PQ^2 + OQ^2 = OP^2$ -----→(1)

$\therefore \frac{PQ^2}{OP^2} + \frac{OQ^2}{OP^2} = 1$ (ಎರಡೂ ಕಡೆ OP^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದೆ)

$\therefore (\frac{PQ}{OP})^2 + (\frac{OQ}{OP})^2 = 1 \quad \therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ----------(I)

ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ OQ^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$\frac{PQ^2}{OQ^2} + 1 = \frac{OP^2}{OQ^2} \quad \therefore (\frac{PQ}{OQ})^2 + 1 = (\frac{OP}{OQ})^2$

$\therefore 1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$

$\therefore \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ --------(II)

ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ PQ^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$1 + \frac{OQ^2}{PQ^2} = \frac{OP^2}{PQ^2} \quad \therefore 1 + (\frac{OQ}{PQ})^2 = (\frac{OP}{PQ})^2$

$\therefore 1 + (\cot\theta)^2 = (\text{cosec}\theta)^2$

$\therefore 1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$ --------(III)

ಸಮೀಕರಣ (I), (II) ಮತ್ತು (III) ನ್ನು ಮೂಲ ಸಂಬಂಧಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ..

ಮೊದಲನೇ ಮೂಲ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದು.

1. $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta \therefore \sin\theta = \pm\sqrt{(1-\cos^2\theta)}$
2. $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta \therefore \cos\theta = \pm\sqrt{(1-\sin^2\theta)}$

θ ಲಘುಕೋನವಾದಾಗ $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\cos\theta$ ಗಳು ಧನವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆಗ

$\sin\theta = +\sqrt{(1-\cos^2\theta)}$

$\cos\theta = +\sqrt{(1-\sin^2\theta)}$

$\tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta} = \frac{Sin\theta}{\sqrt{(1-Sin^2\theta}}$

ಮೂಲ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದು. :

1. $\tan\theta = +\sqrt{(\sec^2\theta-1)}$,
2. $\sec\theta = +\sqrt{(1+\tan^2\theta)}$,
3. $\cot\theta = +\sqrt{(\mathrm{cosec}^2\theta-1)}$,
4. $\mathrm{cosec}\theta = +\sqrt{(1+\cot^2\theta)}$

ವಿವಿಧ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದಂತೆ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಬಹುದು:

ಗಮನಿಸಿ : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ಎನ್ನುವ ಒಂದೇ ಸಂಬಂಧದಿಂದ ಕೆಳಗೆ ನಮೂದಿಸಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
= $\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
= $\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}{\operatorname{cosec}\theta}$
= $\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
= $\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}$
= $\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
= $\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\operatorname{cosec}\theta$

8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 1: $\sqrt{(1+x^2)}*\sin\theta = x$ ಆದರೆ, $\frac{Sin^2\theta}{Cos^2\theta} + \frac{Cos^2\theta}{Sin^2\theta} = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$\sqrt{(1+x^2)}*\sin\theta = x$ (ದತ್ತ) $\therefore \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\therefore \sin^2\theta = \frac{x^2}{1+x^2}$ (ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದೆ) --------(1)

$\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ ($\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ)

$= 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$ ---------(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$\frac{Sin^2\theta}{Cos^2\theta} = \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = x^2 \qquad \text{---------(3)}$$

$$\therefore \frac{Cos^2\theta}{Sin^2\theta} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{---------(4)}$$

(3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ

$$\frac{Sin^2\theta}{Cos^2\theta} + \frac{Cos^2\theta}{Sin^2\theta} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 2: $\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3*\sin^2\theta.\cos^2\theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$x = \sin^2\theta$ ಮತ್ತು $y = \cos^2\theta$ ಆಗಿರಲಿ.

$x+y = 1$ ($\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

LHS ($=\sin^6\theta+\cos^6\theta$) ಭಾಗವು a^3+b^3 ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ, ಅದರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$x^3+y^3 = (x+y)^3-3xy(x+y) = 1-3xy = 1 - 3*\sin^2\theta.\cos^2\theta$ ($\because x+y=1$)

8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 3: $\frac{\tan A}{(SecA-1)} + \frac{\tan A}{(SecA+1)}$ = 2cosecA ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

LHS $= \frac{\tan A\{(SecA+1)+(SecA-1)\}}{(Sec^2 A-1)}$ (ಛೇದ (secA+1)*(secA-1) ಆಗಿರುವಂತೆ)

$= \frac{2\tan A * SecA}{\tan^2 A}$ ($\because$ $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$)

$= \frac{2SecA}{\tan A}$

$= \frac{2SecA * CosA}{\sin A}$ ($\because$ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$)

$= \frac{2}{\sin A}$ ($\because$ $\cos A = \frac{1}{\sec A}$)

= 2cosecA

8.4.2 ಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ θ ಒಂದು ಲಘುಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಕೋನ $90^0-\theta$ ಆಗಿರಲೇ ಬೇಕು($\because$ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0).

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\angle QOP = \theta \therefore \angle QPO = 90^0-\theta$

$\sin\theta = \frac{PQ}{OP}$ ----→(1)

$\cos\theta = \frac{OQ}{OP}$ ----→(2)

$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$ ----→(3)

$\angle QPO$ ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ

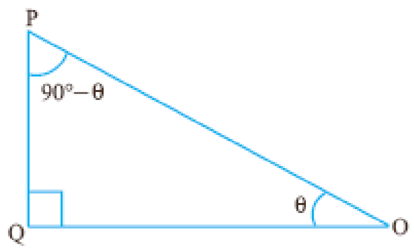
$\cos(90^0-\theta) = \frac{PQ}{OP}$ --→ (4)

$\sin(90^0-\theta) = \frac{OQ}{OP}$ ---→(5)

$\cot(90^0-\theta) = \frac{PQ}{OQ}$ ---→(6)

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ಗಳನ್ನು (4), (5) ಮತ್ತು (6) ರ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ :

1	$\sin\theta = \cos(90^0-\theta)$
2	$\cos\theta = \sin(90^0-\theta)$
3	$\tan\theta = \cot(90^0-\theta)$
4	$\csc\theta = \sec(90^0-\theta)$
5	$\sec\theta = \csc(90^0-\theta)$
6	$\cot\theta = \tan(90^0-\theta)$



8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 4: $3\frac{\sin 62^0}{\cos 28^0} - \frac{\sec 42^0}{\cos ec 48^0} = ?$

ಪರಿಹಾರ:

28 = 90-62 ಮತ್ತು 48 = 90-42 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

cos(28) = cos(90-62) = sin62
ie. cosec(48) = cosec(90-42) = sec(42)

$\therefore\ 3\frac{\sin 62^0}{\cos 28^0} - \frac{\sec 42^0}{\cos ec 48^0}$

$= 3\frac{\sin 62^0}{\sin 62^0} - \frac{\sec 42^0}{\sec 42^0}$

= 3-1 = 2

8.4 ಸಮಸ್ಯೆ 5: sec4A=Cosec(A-20^0) ಆಗಿದ್ದು 4A ಲಘುಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ A ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ನಮಗೆ sin ಮತ್ತು cos ಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಚಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ.

$\frac{1}{\sec 4A} = \frac{1}{\cos ec(A-20^0)}$

Ie, cos4A= sin(A-20^0)
sin(90-4A)= sin(A-20^0) (4A ಲಘುಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ cosθ = sin(90^0-θ))

$\therefore$ 90-4A= A-20^0
$\therefore$ 90+20= A+4A
$\therefore$ 110= 5A
$\therefore$ A= 22^0