

2. ಬೀಜಗಣಿತ :

ಬೀಜಗಣಿತವು ಚರಾಕ್ಷರ (ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆ)ಕ್ಕೆ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ವ್ಯವಹರಿಸುವ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರು ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೇಲೆ ಪುಸ್ತಕ ಬರೆದಿದ್ದರೆಂದರೆ ಅದರ ಮಹತ್ವದ ಅರಿವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಸಕ್ತಿಗಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಹೇಳುವಿರಾ?

1. 10.5×9.5 ರ ಬೆಲೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿ.

2. 2 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 8. ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 400 ಆದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?
(ಲೀಲಾವತಿ: ಶ್ಲೋಕ 59)

3. ನನ್ನ ಮತ್ತು ನನ್ನ ತಂದೆಯ ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಯ 55 ವರ್ಷಗಳು. 16 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ನನ್ನ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ನನ್ನ ವಯಸ್ಸಿನ ಎರಡರಷ್ಟಾಗುವುದಾದರೆ, ಈಗ ನನ್ನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

4. ನೀವು, ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಪ್ರವಾಸಕ್ಕೆ ಹೋಗಲು ಬಯಸುತ್ತೀರಿ. ಆಹಾರಕ್ಕಾಗಿ ಒಟ್ಟು 480 ರೂ. ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದಿರಿ. ಆದರೆ ಕೊನೆಯ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ 8 ಮಂದಿ ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರು ಪ್ರವಾಸಕ್ಕೆ ಹೋಗಲಿಲ್ಲ. ಇವರು ಬಾರದಿದ್ದುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಆಹಾರಕ್ಕಾಗಿ 10 ರೂ. ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಕೊನೆಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಹಣ ಎಷ್ಟು?

5. ಒಂದು ವಿಮಾನವು ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 30 ನಿಮಿಷ ತಡವಾಗಿ ಹೊರಟಿತು. ಅದು ಪಯಣಿಸಬೇಕಾದ ದೂರ 1500 ಕಿ.ಮಿ. ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕೇ ಅಲ್ಲಿಗೆ ತಲುಪಲು ಅದು ತನ್ನ ವೇಗವನ್ನು ಮಾಮೂಲು ವೇಗಕ್ಕಿಂತ 250 ಕಿ.ಮಿ. ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕು. ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಮಾಮೂಲು ವೇಗ ಮತ್ತು ಮಾಮೂಲು ಅವಧಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪಾಠ 2.4, 2.8, 2.14, 2.19 ಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

2.1 ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲ ಕಲ್ಪನೆಗಳು:

ಬದಲಾಗದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 'ಸ್ಥಿರಾಂಕ' ಎನ್ನುವರು. ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು. (ಉದಾ : - 4, 0, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, 1.19, π)

ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದೇ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಲ್ಲ ಸಂಕೇತವೇ 'ಚರಾಕ್ಷರ'. ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಉದಾ : x, y, a+b.)

ಬೀಜಾಕ್ಷರ ಪದ : ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ, ಬೀಜಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು 'ಬೀಜಾಕ್ಷರ ಪದ' ಎನ್ನುವರು. (ಉದಾ : 4ab, -4ab, 2x, 3y, 10, z, $\frac{m}{n}$, $-\frac{p}{q}$...)

ಈಗ ಒಂದು ಪದವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ: $2x = 2 * x$ ಇದು 2 ಮತ್ತು x ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ. '2' ನ್ನು 2x ನ 'ಸಂಖ್ಯಾ ಸಹಗುಣಕ' ಎನ್ನುವರು. 'x' ನ್ನು ಬೀಜಸಂಖ್ಯೆ, 'ಬೀಜಸಹಗುಣಕ' ಅಥವಾ 'ಚರಾಕ್ಷರ' ಎನ್ನುವರು.

ಒಂದೇ ಬೀಜಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಘಾತಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು 'ಸಜಾತಿ ಪದ'ಗಳೆನ್ನುವರು.

ಉದಾ :

(x, 2x, -7x) ---> ಇಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರ x ಮಾತ್ರ.

(2mn, 5mn, $-\frac{1}{3}mn$) ---> ಇಲ್ಲಿ ಬೀಜ ಸಹಗುಣಕ: mn ಮತ್ತು 2, 5, $-\frac{1}{3}$ ಇವು ಸಂಖ್ಯಾ ಸಹಗುಣಕಗಳು

$(x^3, 5x^3, -\frac{5}{6}x^3)$ ---> ಇಲ್ಲಿ x^3 ಎಂಬುದು ಬೀಜಸಹಗುಣಕ. ಈ ಮೂರೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರದ ಘಾತ 3.

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೀಜ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತಗಳಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು 'ವಿಜಾತಿ ಪದ' ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ :

(x, x^3, x^2) ---> ಇಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರ(x) ಒಂದೇ ಆದರೂ ಘಾತ ಸೂಚಿಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ (1, 3, 2)

$(2x, 2a, -2mn)$ ---> ಇಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ಬೇರೆಬೇರೆ x, a, mn)

ಬೀಜೋಕ್ತಿ : ಒಂದು ಅಥವಾ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳು + ಅಥವಾ - ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಂದ ಸಹಯೋಗವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವನ್ನು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳೆನ್ನುವರು.

ಉದಾ : $4x+ax^3+9x^2+\frac{2a}{3b}, -2mn+45+y^{-2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

ಬಹುಪದಗಳು : ಧನಾತ್ಮಕವಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬೀಜಾಕ್ಷರಪದಗಳನ್ನು ಬಹುಪದಗಳೆನ್ನುವರು.

ಉದಾ : $4x+ax^3+9x^2+\frac{2a}{3b}, -2mn+45$

ವಿ.ಸೂ : $y^{-2}+x^{3/2}$ ಇದು ಬಹುಪದವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ y ಯ ಘಾತ: - 2, x ನ ಘಾತಾಂಕ $\frac{3}{2}$ - ಈ ಎರಡೂ ಘಾತಾಂಕಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲ.

	ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ವಿಧಗಳು	ಉದಾಹರಣೆಗಳು
ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು	ಒಂದು ಪದವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದು ಏಕಪದ	$3a, 2x, -\frac{3}{2}y,$
ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು	ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದು ದ್ವಿಪದ	$3-4a, 5x^2-z$
ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು	ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದು ತ್ರಿಪದ	$4x+ax^3+9x^2$

ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಘಾತಗಳು ಏರಿಕೆಯ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಬಹು ಪದಗಳು **ಆದರ್ಶ** ರೂಪದಲ್ಲಿರುವವು.

ಉದಾ :

$y^2-2y^4+3y-y^3+4$ - ಇದು ಆದರ್ಶರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಮೇಲಿನ ಬಹುಪದವನ್ನು ಆದರ್ಶರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$-2y^4-y^3+ y^2+3y+4$ ಅಥವಾ: $4+3y+ y^2-y^3-2y^4$.

ಒಂದು ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ 'n' ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು 'n- ಚರಾಕ್ಷರದ ಬಹುಪದ' ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ :

1. $9x^5+3x^3+9x^2+7x+5$: ಒಂದೇ ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಬಹುಪದ (ಇಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರ: x ಮಾತ್ರ)
2. $9x^5+ax^3+9x^2+7x+5$: 2 ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಬಹುಪದ (x ಮತ್ತು a ಗಳು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು)

ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚರಾಕ್ಷರ ಇರುವ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿಪದಕ್ಕೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು. ಅತಿಹೆಚ್ಚು ಮೊತ್ತವು ಆ ಬಹುಪದದ ಘಾತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾ :

1. $4y^2- x^2y^2+ x^2+6y$ - ಈ ಬಹುಪದದ ಘಾತ 4.
($\because x^2y^2$ ದ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತ 4. ಇದು ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು)
2. $10p^3q^2+4p^2q-5+\sqrt{2}p^4$ - ಈ ಬಹುಪದದ ಘಾತ 5 .
($\because p^3q^2$ ದ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತ 5. ಇದು ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು.)

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ನಿಯಮಗಳು(ಆವೃತ್ತ, ಸಹವರ್ತನ, ಪರಿವರ್ತನ) ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬೀಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ :

$$5 - (-6) = 5 + 6 = 11, \quad -2 - (+5) = -2 - 5 = -7. \quad \text{ಇತ್ಯಾದಿ}$$

$$\text{ಅದೇರೀತಿ : } (a+b)+c = a+(b+c) \dots\dots$$

ಬೀಜಪದಗಳ ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಸಜಾತಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

ಉದಾ :

$$1) 8y^4 - 2y^4 = (8-2)y^4 = 6y^4$$

$$2) -11ab + -6ab = \{-11+(-6)\}ab = (-11-6)ab = -17ab$$

ವಿಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾ :

$8y^4 - 2y^2$ ಇದನ್ನು ಮತ್ತೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

2.1.ಸಮಸ್ಯೆ 1: ಕೂಡಿಸಿ: $(5a^2-6a+3)$, $(2a^2+3a-1)$, $(3a^2-a-5)$

ಪರಿಹಾರ:

$$\begin{aligned} & (5a^2-6a+3) + (2a^2+3a-1) + (3a^2-a-5) \\ &= (5a^2+2a^2+3a^2) + (-6a+3a-a) + (3-1-5) \text{ (ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಬರೆಯಿರಿ.)} \\ &= (5+2+3) a^2 + (-6+3-1)a + (3-1-5) \text{ (ಸಜಾತಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದೆ.)} \\ &= 10 a^2 + (-4a)-3 \\ &= 10a^2 -4a-3 \end{aligned}$$

2.1. ಸಮಸ್ಯೆ 2: $2x^3-x^2+4x-6$ ನ್ನು x^3+5x^2-4x+6 ರಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$\begin{aligned} & (x^3+5x^2-4x+6) - (2x^3-x^2+4x-6) \\ &= x^3+5x^2-4x+6 - 2x^3 -(-x^2) -(+4x) -(-6) \\ &= x^3+5x^2-4x+6 - 2x^3+x^2-4x+6 (\because -(-x^2) = x^2 \text{ ಮತ್ತು } -(-6) = +6) \\ &= (x^3 - 2x^3) + (5x^2+x^2) + (-4x -4x) + (6+6) \text{ (ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದೆ.)} \\ &= -x^3+6x^2-8x +12 \end{aligned}$$

2.1 ಸಮಸ್ಯೆ 3 : x^3+2x^2-3x+7 ರಿಂದ ಎಷ್ಟನ್ನು ಕಳೆದರೆ x^3+x^2+x-1 ಸಿಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ :

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯು 9 ರಿಂದ 3 ನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಎಷ್ಟನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು ಎಂದಂತೆಯೇ. ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ 6. 9 ರಿಂದ 3 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಅದೇ ರೀತಿ ನಾವೀಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದದ್ದು:

$$\begin{aligned} & (x^3+2x^2-3x+7) - (x^3+x^2+x-1) \\ &= x^3+2x^2-3x+7 - x^3-x^2-x -(-1) \\ &= (x^3-x^3)+(2x^2-x^2)+(-3x-x) + (7+1) (\because -(-1) = +1) \\ &= 0+x^2-4x+8 \\ &= x^2-4x+8 \end{aligned}$$

ತಾಳೆ :

$$\begin{aligned} & (x^3+x^2+x-1) + (x^2-4x+8) \\ &= x^3+(x^2+x^2) + (x-4x) -1+8 \text{ (ಸಜಾತೀಯ ಪದಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಬರೆದಾಗ)} \\ &= x^3+2x^2-3x+7 \text{ (ಇದೇ ದತ್ತಾಂಶ)} \end{aligned}$$