ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

4.1.1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ಅಲ್ಲ? ಕಾರಣಗಳ ಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿ.

ಸಂ.	ಪ್ರಶ್ನೆ	ಪರಿಹಾರ
(i)	$4x^2-3x+7$	ಹೌದು. x ಎನ್ನುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಘಾತ ಸೂಚಿ 2 ಆಗಿದ್ದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿದೆ
(ii)	$y^2+\sqrt{2}$	ಹೌದು. y ಎನ್ನುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಘಾತ ಸೂಚಿ 2 ಆಗಿದ್ದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿದೆ
(iii)	$3\sqrt{t}+t\sqrt{2}$	ಅಲ್ಲ t ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ $3\sqrt{t}$ $(=3t^{\frac{1}{2}})$ ಪದದ ಘಾತ ಸೂಚಿ $\frac{1}{2}$ ಆಗಿದ್ದು ಅದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿಲ್ಲ
(iv)	$y+\frac{2}{y}$	ಅಲ್ಲ y ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ $\frac{2}{y}$ $(=2y^{-1})$ ಪದದ ಘಾತ ಸೂಚಿ -1 ಆಗಿದ್ದು ಅದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿಲ್ಲ
(v)	$x^{10}+y^3+t^{50}$	ಅಲ್ಲ x,y,z ಎನ್ನುವ ಮೂರು ಚರಾಕ್ಷಗಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿದೆ.

4.1.2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ x^2 ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಸಂ.	ಪ್ರಶ್ನೆ	**x^2 ನ ಸಹಗುಣಕ**
(i)	$2+x^2+x$	1
(ii)	$2-x^2+x^3$	-1
(iii)	$\frac{\pi}{2}x^2+x$	$\frac{\pi}{2}$
(iv)	$\sqrt{2}x-1$	$\sqrt{2}$

4.1.3. ಡಿಗ್ರಿ 35 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಹಾಗೂ ಡಿಗ್ರಿ 100 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.

ಡಿಗ್ರಿ 35ಆಗಿರುವ ಒಂದು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ $\Rightarrow$	$4x^{35}+9x$
ಡಿಗ್ರಿ 100 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ $\Rightarrow$	$5m^{100}$

4.1.4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಸಂ.	ಪ್ರಶ್ನೆ	ಡಿಗ್ರಿ
(i)	$5x^3+4x^2+7x$	3
(ii)	$4-y^2$	2
(iii)	$5t-\sqrt{7}$	1
(iv)	3	0

4.1.5. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ, ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಘನಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ

ಸಂ.	ಪ್ರಶ್ನೆ	ಡಿಗ್ರಿ	ವಿಧ
(i)	x^2+x	2	ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ
(ii)	$x-x^2$	2	ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ
(iii)	$y+y^2+4$	2	ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ
(iv)	$1+x$	1	ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ
(v)	$3t$	1	ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ
(vi)	r^2	2	ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ
(vii)	$7x^3$	3	ಘನಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

4.2.1. x ನ ಬೆಲೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದ್ದಾಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $5x-4x^2+3$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಂ.	x	f(x)=??
(i)	x=0	f(0)= 5*0-4*0*0+3=3
(ii)	x=-1	f(-1)= 5*(-1)-4*(-1)*(-1)+3=-5-4+3=-6
(iii)	x=2	f(2)= 5*2-4*2*2+3=10-16+3=-3

4.2.2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೂ p(0), p(1) ಮತ್ತು p(2) ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಂ.	ಪ್ರಶ್ನೆ	p(0)=??	p(1)=??	p(2)=??
(i)	$p(y)=y^2-y+1$	$p(0)= 0^2-0+1=1$	$p(1)= 1^2-1+1=1$	$p(2)= 2^2-2+1=1$ =4-2+1=3
(ii)	$p(t)=2+t+2t^2-t^3$	$p(0)= 2+0+2*0^2-0^3=2$	$p(1)=2+1+2*1^2-1^3$ =2+1+2-1=4	$p(2)=2+2+2*2^2-2^3$ =2+2+8-8=4
(iii)	$p(x)=x^3$	$p(0)= 0^3=0$	$p(1)=1^3=1$	$p(2)=2^3=8$
(iv)	p(x)=(x-1)(x+1)	p(0)=(0-1)(0+1)=-1	p(1)=(1-1)(1+1)=0	p(2)=(2-1)(2+1)=1*3=3

4.2.3. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು, ಅವುಗಳೆದುರು ಸೂಚಿಸಿದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಸಂ.	p(x)	x=	p(x) =??	ಶೂನ್ಯತೆ ??
(i)	3x+1	$-\frac{1}{3}$	$p(-\frac{1}{3}) = 3*(-\frac{1}{3})+1=-1+1=0$	$x=-\frac{1}{3}$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆ.
(ii)	$5x-\pi$	$\frac{4}{5}$	$p(\frac{4}{5}) = 5*(\frac{4}{5}) - \pi = 4-\pi \neq 0$	$x=\frac{4}{5}$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿಲ್ಲ
(iii)	x^2-1	1	$p(1)=1^2-1=0$	x=1 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆ.
	x^2-1	-1	$p(-1)=(-1)^2-1=1-1=0$	x=-1 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆ.
(iv)	(x+1)(x-2)	-1	$p(-1)=(-1+1)(-1-2)=0*(-3)=0$	x=-1 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆ.
		2	$p(2)=(2+1)(2-2)=3*0=0$	x=2 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆ.
(v)	x^2	0	$p(0)=0^2=0$	x=0 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆ.
(vi)	lx+m	$-\frac{m}{l}$	$p(-\frac{m}{l})=l*(-\frac{m}{l})+m=-m+m=0$	$x=-\frac{m}{l}$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆ.
(vi)	$3x^2-1$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$p(\frac{1}{\sqrt{3}})=3*\frac{1}{\sqrt{3}}*\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\frac{3}{3}-1=0$	$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆ.
		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$p(\frac{2}{\sqrt{3}})=3*\frac{2}{\sqrt{3}}*\frac{2}{\sqrt{3}}-1=\frac{12}{3}-1=4-1=3 \neq 0$	$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿಲ್ಲ
(vii)	2x+1	$\frac{1}{2}$	$p(\frac{1}{2})=2*\frac{1}{2}+1=1+1=2 \neq 0$	$x=\frac{1}{2}$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿಲ್ಲ

4.2.4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಮನಿಸಿ : x ಎನ್ನುವುದು p(x) ನ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಬೇಕಾದರೆ p(x)=0 ಆಗಲೇ ಬೇಕು.			
ಸಂ.	p(x)	p(x)=0 ಆಗಬೇಕಾದರೆ x=??	ಯಾವುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ
(i)	x+5	$x+5=0 \Rightarrow x=-5$	-5
(ii)	x-5	$x-5=0 \Rightarrow x=5$	5
(iii)	2x+5	$2x+5=0 \Rightarrow 2x=-5 \therefore x=-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
(iv)	3x-2	$3x-2=0 \Rightarrow 3x=2 \therefore x=\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
(v)	3x	$3x=0 \Rightarrow x=0$	0
(vi)	ax	$ax=0 \Rightarrow a=0$	0
(vii)	cx+d	$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \therefore x=-\frac{d}{c}$	$-\frac{d}{c}$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.3

4.3.1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಂದ x^3+3x^2+3x+1 ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಮನಿಸಿ : ಶೇಷಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ p(x) ನ್ನು (x-a) ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವು p(a) ಆಗಿರುತ್ತದೆ

ಸಂ.	**x+a**	**a**	$p(x)= x^3+3x^2+3x+1$; **ಶೇಷ=p(a)=??**
(i)	x+1	-1	$p(a)=p(-1)=(-1)^3+3(-1)^2+3(-1)+1=-1+3-3+1=0$
(ii)	$x-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$p(a)=p(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^3+3*(\frac{1}{2})^2+3*(\frac{1}{2})+1=\frac{1}{8}+3*\frac{1}{4}+3*\frac{1}{2}+1=\frac{1+6+12+8}{8}=\frac{27}{8}$
(iii)	x	0	$p(a)=p(0)=0^3+3*0^2+3*0+1=1$
(iv)	$x+\pi$	$-\pi$	$p(a)=p(-\pi)=(-\pi)^3+3(-\pi)^2+3(-\pi)+1=-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$
(v)	5+2x	$-\frac{5}{2}$	$p(a)=p(-\frac{5}{2})=(-\frac{5}{2})^3+3*(-\frac{5}{2})^2+3*(-\frac{5}{2})+1=-\frac{125}{8}+3*\frac{25}{4}-3*\frac{5}{2}+1=\frac{-125+150-60+8}{8}=-\frac{27}{8}$

4.3.2. x^3-ax^2+6x-a ಯನ್ನು (x-a) ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $p(x)= x^3-ax^2+6x-a \Rightarrow$ ಶೇಷ$=p(a)= a^3-a*a^2+6a-a=5a$

4.3.3. 7+3x ಇದು $3x^3+7x$ ರ ಅಪವರ್ತನವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $p(x)= 3x^3+7x$, $x+a=7+3x= 3*(\frac{7}{3}+x) \Rightarrow a=(-\frac{7}{3})$ $\therefore$ ಶೇಷ$=p(a)= 3(-\frac{7}{3})^3+7(-\frac{7}{3})=-\frac{343}{9}-\frac{49}{3}=\frac{-343-147}{9}=\frac{-490}{9} \neq 0$

$\therefore$ ಶೇಷಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ 7+3x ಇದು $3x^3+7x$ ರ ಅಪವರ್ತನವಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ 4.4

4.4.1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು (x+1) ನ್ನು ಅಪವರ್ತನವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ:

ಗಮನಿಸಿ : ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ p(a)=0 ಆದರೆ (x-a) ಯು p(x) ನ ಅಪವರ್ತನ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ (x-a)=(x+1)			
ಸಂ.	p(x)=	$p(x)= x^3+3x^2+3x+1$; a=-1 ಶೇಷ=p(a)=??	(x+1) ಅಪವರ್ತನವೇ?
(i)	x^3+x^2+x+1	$p(a)=p(-1)= (-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=0$	ಹೌದು
(ii)	$x^4+x^3+x^2+x+1$	$p(a)=p(-1)= (-1)^4+(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=1 \neq 0$	ಅಲ್ಲ
(iii)	$x^4+3x^3+3x^2+x+1$	$p(a)=p(-1)= (-1)^4+3(-1)^3+3(-1)^2+(-1)+1=1$ $=1-3+3-1+1=1 \neq 0$	ಅಲ್ಲ
(iv)	$x^3-x^2-(2+\sqrt{2})x+\sqrt{2}$	$p(a)=p(-1)= (-1)^3-(-1)^2-(2+\sqrt{2})(-1)+\sqrt{2}$ $=-1-1+2+\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2} \neq 0$	ಅಲ್ಲ

4.4.2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ g(x) ಇದು p(x) ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರ್ಧರಿಸಿ:

ಗಮನಿಸಿ : ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ p(a)=0 ಆದರೆ g(x)=(x-a) ಯು p(x) ನ ಅಪವರ್ತನ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.					
ಸಂ.	p(x)=	g(x)	a	$p(x)= x^3+3x^2+3x+1$; a=-1 ಶೇಷ=p(a)=??	g(x) ಇದು p(x) ನ ಅಪವರ್ತನವೇ?
(i)	$2x^3+x^2-2x-1$	x+1	-1	$p(a)=p(-1)= 2(-1)^3+(-1)^2-2(-1)-1 =-2+1+2-1=0$	ಹೌದು
(ii)	x^3+3x^2+x+1	x+2	-2	$p(a)=p(-1)= (-1)^3+3(-1)^2+(-1)+1=-2 \neq 0$	ಅಲ್ಲ
(iii)	x^3-4x^2+x+6	x-3	3	$p(a)=p(3)= 3*3^3-4*3^2+3+6=1=27-36+3+6==0$	ಹೌದು

4.4.3. p(x)ನ ಅಪವರ್ತನ (x–1) ಆಗಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡಿಹಿಡಿಯಿರಿ:

ಗಮನಿಸಿ : ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ p(a)=0 ಆದರೆ (x-a)=(x-1) ಯು p(x) ನ ಅಪವರ್ತನ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ a=1

ಸಂ.	p(x)=	a=1; ಶೇಷ=p(a)=0 ಆಗಬೇಕು ಆಗ k ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯ ಬೇಕು.	k=??
(i)	x^2+x+k	$p(a)=p(1)= 1^2+1+k=2+k$	$p(a)=0 \Rightarrow k=-2$
(ii)	$2x^2+kx+\sqrt{2}$	$p(a)= p(1)= 2*1^2+k+\sqrt{2}=k+2+\sqrt{2}$	$p(a)=0 \Rightarrow k=-(2+\sqrt{2})$
(iii)	$kx^2-\sqrt{2}x+1$	$p(a)= p(1)= k*1^2-\sqrt{2}*1+1=k-\sqrt{2}+1$	$p(a)=0 \Rightarrow k=\sqrt{2}-1$
(iv)	kx^2-3x+k	$p(a)= p(1)=k-3+k=2k-3$	$p(a)=0 \Rightarrow k=\frac{3}{2}$

4.4.4. ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

ಸಂ.	ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ	ಪದಗಳ ವಿಭಜನೆ	ಅಪವರ್ತನ ಕ್ರಿಯೆ
(i)	$12x^2-7x+1$	12*1=(-4)*(-3) & -7= -4-3	$12x^2-7x+1 = 12x^2-3x-4x+1=3x(4x-1)-1(4x-1)=(4x-1)(3x-1)$
(ii)	$2x^2+7x+3$	2*3= 6*1 & 7= 6+1	$2x^2+7x+3=2x^2+6x+x+3 =2x(x+3)+1(x+3)=(x+3)(2x+1)$
(iii)	$6x^2+5x-6$	6*-6=-9*(-4) & 5= 9-4	$6x^2+5x-6 =6x^2+9x-4x-6=3x(2x+3)-2(2x+3)=(2x+3)(3x-2)$
(iv)	$3x^2-x-4$	3*-4=3*-4 & -1= -4+3	$3x^2-x-4 =3x^2-4x+3x-4=x(3x-4)+1(3x-4)=(3x-4)(x+1)$

4.4.4. ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಮೊದಲು ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದನ್ನು ಭಾಜಕವನ್ನಾಗಿರಿಸಿ ದೀರ್ಘಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಬಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಪದಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಮೂಲಕ ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಮೊದಲ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು a ಯನ್ನು ಊಹಿಸುವ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ---→	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
f(x)=	x^3-2x^2-x+2	x^3-3x^2-9x-5	$x^3+13x^2+32x+20$	$2y^3+y^2-2y-1$
ಊಹಿಸಿದ a=	-1	-1	-1	1
f(a)=0??	$= (-1)^3-2(-1)^2-(-1)+2$ $=-1-2+1+2=0$	$= (-1)^3-3(-1)^2-9(-1)-5$ $=-1-3+9-5=0$	$= (-1)^3+13(-1)^2+32(-1)+20$ $=-1+13-32+20=0$	$=2+1-2-1=0$
ಮೊದಲ ಅಪವರ್ತನ	(x+1)	(x+1)	(x+1)	(y-1)
ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕರ				
ಭಾಗಲಬ್ಧ	$x^2-3x+2= x^2-2x-x+2$ $=x(x-2)-1(x-2)$ $=(x-2)(x-1)$	$x^2-4x-1= x^2+x-5x-1$ $=x(x+1)-5(x+1)$ $=(x+1)(x-5)$	$x^2+12x+20=x^2+2x+10x+20$ $=x(x+2)+10(x+2)$ $= (x+2)(x+10)$	$2y^2+3y+1=$ $2y^2+2y+y+1$ $=2y(y+1)+1(y+1)$ $=(y+1)(2y+1)$
f(x)=	(x+1)(x-2)(x-1)	(x+1)(x+1)(x-5)	(x+1)(x+2)(x+10)	(y-1)(y+1)(2y+1)

ಅಭ್ಯಾಸ 4.5

4.5.1. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

ಸಂ.	ಪ್ರಶ್ನೆ.	ಗುಣಲಬ್ಧ	ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣ.
(i)	$(x+4)(x+10)$	$=x^2+x(4+10)+4*10= x^2+14x+40$	$(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ & $a=4,b=10$
(ii)	$(x+8)(x-10)$	$=x^2+x(8-10)+8*(-10)= x^2-2x-80$	$(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ & $a=8,b=-10$
(iii)	$(3x+4)(3x-5)$	$=(3x)^2+3x(4-5)+4*(-5)=9x^2-3x-20$	$(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ & $x=3x,a=4,b=-5$
(iv)	$(y^2+\frac{3}{2})(y^2-\frac{3}{2})$	$=(y^2)^2-(\frac{3}{2})^2=y^4-\frac{9}{4}$	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ & $a= y^2$ & $b=\frac{3}{2}$
(v)	$(3-2x)(3+2x)$	$=3^2-(2x)^2=9-4x^2$	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ & $a= 3$ & $b=2x$

4.5.2. ನೇರವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೆ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

ಸಂ.	ಪ್ರಶ್ನೆ.	ಗುಣಲಬ್ಧ	ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣ.
(i)	$103*107$	$=(100+3)(100+7)=100^2+100*10+21=11021$	$(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ & $x=100, a=3,b=7$
(ii)	$95*96$	$=(90+5)(90+6)=90^2+90*11+30=9120$	$(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ & $x=90, a=5,b=6$
(iii)	$104*96$	$=(100+4)(100-4)=100^2-4^2=9984$	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ & $a= 100$ & $b=4$

4.5.3. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

	(i)	(ii)	(iii)
ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು --->	$9x^2+6xy+y^2$	$4y^2-4y+1$	$x^2-\frac{y^2}{100}$
ಪದಗಳ ವಿಭಜನೆ	$(3x)^2+2*3xy+(y)^2$	$(2y)^2-2*2y+(1)^2$	$(x)^2-\left(\frac{y}{10}\right)^2$
ಯಾವುದರಂತೆ	$(a+b)^2 =a^2+2ab-b^2$; $a=3x$ & $b=y$	$(a-b)^2 =a^2-2ab+b^2$; $a=2y$ & $b=1$	$(a+b)(a-b)= a^2-b^2$; $a=x$ & $b=\left(\frac{y}{10}\right)$
ಅಪವರ್ತನಗಳು	$(3x+y)$ & $(3x+y)$	$(2y-1)$ & $(2y-1)$	$x+\left(\frac{y}{10}\right)$ & $x-\left(\frac{y}{10}\right)$

4.5.4. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ:

ಗಮನಿಸಿ : ಇಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು $(a+b+c)^2= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತವೆ	
(i)	$(x+2y+4z)^2=(x)^2+(2y)^2+(4z)^2 + 2*x*2y + 2*2y*4z + 2*4z*x$ $=x^2+4y^2+16z^2+4xy+16zy+8zx$
(ii)	$(2x-y+z)^2=(2x)^2+(-y)^2+(z)^2 + 2*2x*(-y) + 2*(-y)z + 2*z*2x$ $=4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$
(iii)	$(-2x+3y+2z)^2=(-2x)^2+(3y)^2+(2z)^2 +2*(-2x)*3y +2*3y*2z +2*2z*(-2x)$ $=4x^2+9y^2+4z^2-12xy+12yz-8xz$
(iv)	$(3a-7b-c)^2=(3a)^2+(-7b)^2+(-c)^2 + 2*3a*(-7b) + 2*(-7b)*(-c) + 2*(-c)*3a$ $=9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$
(v)	$(-2x+5y-3z)^2=(-2x)^2+(5y)^2+(-3z)^2+ 2*(-2x)*5y + 2*5y*(-3z) + 2*(-3z)*(-2x)$ $=4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12xz$
(vi)	$(\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1)^2=(\frac{1}{4}a)^2+(-\frac{1}{2}b)^2+1^2 + 2*(\frac{1}{4}a)*(-\frac{1}{2}b) +2*(-\frac{1}{2}b)*1 + 2*1*(\frac{1}{4}a)$ $=\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{4}b^2+1-\frac{1}{4}ab-b+\frac{1}{2}a$

4.5.5. ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

ಗಮನಿಸಿ : ಇಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತವೆ	
(i)	$4x^2+9y^2+16z^2+12xy-24yz-16xz$ $=(2x)^2+(3y)^2+(-4z)^2 + 2*2x*3y + 2*3y*(-4z) + 2*(-4z)*x$ $=(2x+3y-4z)^2$
(ii)	$2x^2+y^2+8z^2-2\sqrt{2}xy+4\sqrt{2}yz-8xz$ $=(-\sqrt{2}x)^2+y^2+(2\sqrt{2}z)^2 + 2*(-\sqrt{2}x)*y + 2*y*(2\sqrt{2}z) + 2*(2\sqrt{2}z)*(-\sqrt{2}x)$ $(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z)^2$

4.5.6. ಕೆಳಗಿನ ಘನಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತೃತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:

ಗಮನಿಸಿ : ಇಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು $(a+b)^3= a^3+b^3+3ab(a+b)$ ಅಥವಾ $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತವೆ	
(i)	$(2x+1)^3=(2x)^3+(1)^3 + 3*2x*1(2x+1)$ $=8x^3+1+6x(2x+1)=8x^3+12x^2+6x+1$
(ii)	$(2a-3b)^3=(2a)^3-(3b)^3 - 3*2a*3b(2a-3b)$ $=8a^3-27b^3-18ab(2a-3b)=8a^3-27b^3-36a^2b+54ab^2$
(iii)	$(\frac{3}{2}x +1)^3=(\frac{3}{2}x)^3+(1)^3 + 3*\frac{3}{2}x*1(\frac{3}{2}x +1)$ $=\frac{27}{8}x^3+1+\frac{9}{2}x(\frac{3}{2}x +1)=\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$
(iv)	$(x-\frac{2}{3}y)^3=(x)^3-(\frac{2}{3}y)^3 - 3*x*\frac{2}{3}y(x-\frac{2}{3}y)$ $=x^3-\frac{8}{27}y^3-2xy(x-\frac{2}{3}y) =x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4}{3}xy^2$

4.5.7. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ:

ಇಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು $(a+b)^3= a^3+b^3+3ab(a+b)$ ಅಥವಾ $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತವೆ	
(i)	$99^3=(100-1)^3=100^3-1^3-3*100*1(100-1)$ $=1000000-1-300*100+300=970,299$
(ii)	$102^3=(100+2)^3=100^3+2^3+3*100*2(100+2)$ $=1000000+8+600*100+1200=1,061,208$
(iii)	$998^3=(1000-2)^3=1000^3-2^3-3*1000*2(1000-2)$ $=100000000-8-6000*1000+12000=994,011,992$

4.5.8. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

ಇಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು $a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3$ ಅಥವಾ $a^3-b^3-3ab(a-b)=(a-b)^3$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತವೆ	
(i)	$8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2=(2a)^3+b^3+3*2a*b(2a+b)=(2a+b)^3$
(ii)	$8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2=(2a)^3-b^3-3*2a*b(2a-b)=(2a-b)^3$
(iii)	$27-125a^3-135a+225a^2=(3)^3-(5a)^3-3*3*5a(3-5a)=(3-5a)^3$
(iv)	$64a^3-27b^3-144a^2b+108ab^2=(4a)^3-(3b)^3-3*4a*3b(4a-3b)=(2a-b)^3$
(v)	$27p^3-\frac{1}{216}-\frac{9}{2}p^2+\frac{1}{4}p=(3p)^3-(\frac{1}{6})^3-3*3p*\frac{1}{6}(3p-\frac{1}{6})=(3p-\frac{1}{6})^3$

4.5.9. ತಾಳೆ ನೋಡಿ:

(i)	$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ RHS= $x(x^2-xy+y^2)+y(x^2-xy+y^2)=x^3-x^2y+xy^2+yx^2-xy^2+y^3= x^3+y^3$=LHS
(ii)	$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ RHS= $x(x^2+xy+y^2)-y(x^2+xy+y^2)=x^3+x^2y+xy^2-yx^2-xy^2-y^3= x^3-y^3$=LHS

4.5.10. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i)	$27a^3+125b^3= (3a)^3+(5b)^3$ ಇದು $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಮತ್ತು $x=3a$ & $y=5b$ $27y^3+125z^3= (3a+5b)(9a^2-15ab+25b^2)$
(ii)	$64m^3-343n^3= (4m)^3-(7n)^3$ ಇದು $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಮತ್ತು $x=4m$ & $y=7n$ $64m^3-343n^3=(4m-7n)(16m^2+28mn+49n^2)$

4.5.11. ಅಪವರ್ತಿಸಿ : $27x^3+y^3+z^3-9xyz$

$27x^3+y^3+z^3-9xyz=(3x)^3+y^3+z^3-3*(3x)*y*z$

ಇದು $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಮತ್ತು $a=3x$ & $b=y$ & $c=z$

$\Rightarrow 27x^3+y^3+z^3-9xyz=(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz)$

4.5.12. ತಾಳೆನೋಡಿ : $x^3+y^3+z^3=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$

RHS= $\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)]$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)*2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=(x+y+z)*(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+y^3+z^3=$ LHS

($\because$ ಇದು $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದೆ)

4.5.13. $(x+y+z)=0$ ಆದರೆ $x^3+y^3+z^3=3xyz$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$(x+y+z)=0 \Rightarrow x+y=-z$

$\therefore (x+y)^3=-z^3$

$\Rightarrow x^3+y^3+3xy(x+y)=-z^3$

$\Rightarrow x^3+y^3+3xy(-z)=-z^3$

$\therefore x^3+y^3+z^3=3xyz$

4.5.14. ನೇರವಾಗಿ ಘನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸದೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಘಾತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 0 ಅಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ $(x+y+z)=0$ ಆದಾಗ $x^3+y^3+z^3= 3xyz$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.	
(i)	$[(-12)^3+(7)^3+(5)^3]$; $-12+7+5=0 \Rightarrow [(-12)^3+(7)^3+(5)^3] =3*(-12)*7*5=-1260$
(ii)	$[(28)^3+(-15)^3+(-13)^3]$; $28-15-13=0 \Rightarrow [(28)^3+(-15)^3+(-13)^3] =3*(28)*(-15)*(-13)=16,380$

4.5.15. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆಯತಗಳ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಮೂಲಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುತ್ತೇವೆ.	
(i)	$25a^2-35a+12= 25a^2-15a-20a+(-4)*(-3)$ ಗಮನಿಸಿ : $25*12=(-15)*(-20)$, $-35=-15-20$ & $12=(-4)*(-3)$ $=5a(5a-3)-4(5a-3)=(5a-3)(5a-4)$ $\Rightarrow$ ಉದ್ದ $(5a-3)$ ಆದರೆ, ಅಗಲ$(5a-4)$ ಅಥವಾ ಉದ್ದ $(5a-4)$ ಆದರೆ, ಅಗಲ$(5a-3)$.
(ii)	$35y^2+13y-12= 35y^2+28y-15y+(-3)*(4)$ ಗಮನಿಸಿ : $35*-12=(-15)*(-20)$, $+13=+28-15$ & $-12=(-3)*(4)$ $=7y(5y+4)-3(5y+4)=(5y+4)(7y-3)$ $\Rightarrow$ ಉದ್ದ $(5y+4)$ ಆದರೆ, ಅಗಲ$(7y-3)$ ಅಥವಾ ಉದ್ದ $(7y-3)$ ಆದರೆ, ಅಗಲ$(5y+4)$

4.5.16. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆಯತ ಘನಗಳ ಆಯಾಮ (ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ)ಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i)	$3x^2-12x= 3x(x-4) \Rightarrow$ ಆಯತ ಘನಗಳ ಬದಿಗಳು $3, x$ & $(x-4)$
(ii)	$12ky^2+8ky-20k=4k(3y^2+2y-5)=4k(3y^2+5y-3y-5)=4k[\ y(3y+5)-(3y+5)\ ]=4k(3y+5)(y-1)$ $\Rightarrow$ ಆಯತ ಘನಗಳ ಬದಿಗಳು $4k,(3y+5)$ & $(y-1)$