2.15 ಬೈಜಿಕ ಸಂರಚನೆ:

ನಾವೀಗಾಗಲೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಗಣಿತದ ಮೂಲ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
ಇವುಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಇನ್ನೂ ಬೇರೆ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು, ಕೆಲವು ಕ್ರಿಯೆಗಳಿವೆ:

1. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು: $\{\frac{(a+b)}{2}\}$ –> ಸರಾಸರಿ
2. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸುವುದು.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕೆಲವು ಸಂಕೇತಗಳು:

ಅರ್ಥ	ಸಂಕೇತ
ಸೇರಿದೆ	$\in$
ಸೇರಿಲ್ಲ	$\notin$
ಎಲ್ಲಾ(ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ)	$\forall$
ಅಸ್ತಿತ್ವವಿದೆ	$\exists$
ಹೀಗಾಗುವಂತೆ	:

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ N = {1,2,3,4 ...} = { n: n $\in$ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}
ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ W = {0,1,2,3,....} = {n: n =0, ಮತ್ತು n$\in$N}

2.15 ಉದಾಹರಣೆ 1:

S={2, 4, 8, 16....}={ 2 ರ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2} ={2^m :ಇಲ್ಲಿ m ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ m >1}
ಈಗ ನಾವು ಈ ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ, ಘಾತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

1. S ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಆ ಮೊತ್ತವು S ಗಣದಲ್ಲಿಲ್ಲ.
(ಉದಾ; 6(=2+4),10(=2+8),12(=4+8) ಇವೆಲ್ಲ S ಗಣದಲ್ಲಿಲ್ಲ.)
2. S ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ 2 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಕೂಡಾ S ಗಣದ ಗಣಾಂಶವೇ ಆಗಿದೆ. ಏಕೆ?
(2^m ಮತ್ತು 2^n ಇವೆರಡು S ನಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳಾದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧ $(2^m)*(2^n) = 2^{m+n}$ ಇದು S ಗಣದ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವೇ ಆಗಿದೆ.)
3. 2 ರ ಯಾವುದೇ ಘಾತದ ಸಂಖ್ಯೆಯು S ಗಣದ ಗಣಾಂಶವೇ ಆಗಿದೆ. ಏಕೆ?
(2^m ಮತ್ತು 2^n ಇವು S ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, 2^{mz} $[=(2^m)^z$ ಇಲ್ಲಿ $z=2^n$ ಇದೂ ಕೂಡಾ S ಗಣದ ಗಣಾಂಶವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.)

ಫಲಿತಾಂಶ:

S ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಕಲನದಿಂದ ಬರುವ ಮೊತ್ತವು S ಗಣದಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ S ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಮಾಡಿದ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಘಾತಾಂಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳು S ಗಣದಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:

1. a, b ∈ A ಆದಾಗ, a, b ಗಳ ಮೇಲೆ ಮಾಡಿದ ಕ್ರಿಯೆಯ ಫಲಿತಾಂಶ ∈ A ಆದರೆ, A ಯು ಆ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ ಆವೃತ ಗುಣ ಹೊಂದಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
2. a, b ∈ A ಆದಾಗ ಮತ್ತು c = (a ಕ್ರಿಯೆ b) ∈A ಆದರೆ ಆ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು 'ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ರೂಢಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು '*' ದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು a ಕ್ರಿಯೆ b ಯನ್ನು ಓದುವ ಕ್ರಮ a ಸ್ಟಾರ್(ನಕ್ಷತ್ರ) b.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ S ಗಣವು ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಕಲನವು S ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆ ಅಲ್ಲ. ಆದರೆ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಘಾತ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳು S ಗಣದಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಯೆಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

ಸಂ..	ಗಣ	ಕ್ರಿಯೆ: ನಕ್ಷತ್ರ(*)	ಅವಲೋಕನ	ಫಲಿತಾಂಶ	ಕಾರಣ
1	N = {1,2,3; ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}	ಮೊತ್ತ	$\forall$,a,b $\in$N, a+b $\in$N	N ಗಣವು + ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.	2 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ.
2	N = {1,2,3; ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು }	ಗುಣಲಬ್ಧ	$\forall$,a,b $\in$N, a* b $\in$N	N ಗಣವು * ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.	2 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ.
3	A = {1,3,5: ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು }	ಮೊತ್ತ	$\forall$,a,b $\in$N, a+b $\notin$N	A ಯು + ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.	2 ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ (ಅದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ)
4	B = {1,3,5: ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು }	ಗುಣಲಬ್ಧ	$\forall$,a,b $\in$N, a*b $\in$N	B ಯು * ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.	2 ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.
5	Z =(0,-1,1,2,-2: ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು)	ಸರಾಸರಿ	$\forall$,a,b $\in$Z, a*b $=\frac{(a+b)}{2}$ $\notin$Z	Z ಗಣವು 'ಸರಾಸರಿ' ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.	0 * 1 = $\frac{(0+1)}{2}$ ಇದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ.
6	Q = ($\frac{p}{q}$, ಇಲ್ಲಿ p,q $\in$Z, q $\neq$0	ಭಾಗಾಕಾರ	$\forall$,a,b $\in$Q, $\frac{a}{b}$ $\notin$Q	Q ಗಣವು ÷ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.	ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 0 ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿಲ್ಲ. 0$\in$ Q ಆದರೂ $\frac{1}{0}$ $\notin$Q)

ಆವೃತ್ತ ಗುಣಕ್ಕೂ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಗೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ:

ಯಾವುದೇ ಗಣವು ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸಿದರೆ. ಆ ಕ್ರಿಯೆಯು ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಯು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಗಣವು ಆ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:

ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣವು ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಒಂದು '**ಬೈಜಿಕ ಸಂರಚನೆ**' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಅದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ (S,*) ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ

(N,+), (N,*), (B,*) ಇವೆಲ್ಲವೂ ಬೈಜಿಕ ಸಂರಚನೆಗಳು

(A,+), (Z, ಸರಾಸರಿ), (Q, ÷) ಇವು ಬೈಜಿಕ ಸಂರಚನೆಗಳಲ್ಲ.