3.1 ಗಣಗಳ ಪರಿಚಯ:

ಒಂದು ತರಗತಿಯ 60 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಕಬಡ್ಡಿ ಅಥವಾ ಹಾಕಿ ಟೀಂ ನಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಟೀಂ ನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಕೊಳ್ಳ ಬೇಕು. 45 ಮಂದಿ ಕಬಡ್ಡಿ ಟೀಂ ಸೇರಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು 30 ಮಂದಿ ಹಾಕಿ ಟೀಂ ಸೇರಿದ್ದಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಎರಡೂ ಟೀಂಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು?
ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಕೂಡಲೇ ಉತ್ತರ ಹೇಳುವಿರಾ? ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ ಪಾಠ 3.3 ನಲ್ಲಿ ಇದೆ.
ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಗಣಗಳು ಎನ್ನುವ ಪಾಠ ಸಹಾಯಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಗಣ ಎಂದರೆ ಗುಂಪು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :
ವಿಶಿಷ್ಟ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ, ಗುಂಪಾಗಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಗುಂಪನ್ನು 'ಗಣ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಆ ಗಣದ 'ಗಣಾಂಶಗಳು' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಪುಷ್ಪಾವರಣದ ({ }) ಒಳಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

A = {1, 4, 9, 16...} ಇಲ್ಲಿ A ಯು ಗಣ ಮತ್ತು 1, 4, 9, 16 . . ಗಳು ಗಣಾಂಶಗಳು.

B= {1, 8, 27, 64...} ಇಲ್ಲಿ B ಯು ಗಣ ಮತ್ತು 1, 8, 27 . . ಗಳು ಗಣಾಂಶಗಳು.

ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅಥವಾ ನಿಯಮವನ್ನು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಹೀಗೂ ಬರೆಯಬಹುದು:

C = {ಶುದ್ಧ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}

D = {ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳು}

ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು 'ಗಣಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಗಣ A ಮತ್ತು B ಇದಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ.

C = {ಶುದ್ಧ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}

D = {ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳು}

ಒಂದು ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಕ್ಷಣ(ನಿಯಮ)ವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬರೆಯುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು 'ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿ' ಅಥವಾ 'ರೂಲ್ ವಿಧಾನ' ಎನ್ನುವರು. ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಗಣ C ಮತ್ತು D ಇದಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು:

1. ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ಹೇಳುವಾಗ, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳು ಸರಿಯಾಗಿ ಗುರುತಿಸುವಂತಿರಬೇಕು. ಸರಿಯಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಕ್ಷಣವಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಇದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.
   'ಎತ್ತರದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಗುಂಪು' ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಗಣವಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ 'ಎತ್ತರ' ಮಾನದಂಡದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯ. ಆದರೆ '175 ಸೆ.ಮೀ. ಗಿಂತ ಎತ್ತರದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು' ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಗಣ. ಏಕೆಂದರೆ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಕ್ಷಣ '175 ಸೆ.ಮೀ. ಗಿಂತ ಎತ್ತರ'.
2. ಗಣದ ಗಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.
   E = {1, 4, 9, 16...} = {4, 9, 16, 1, ..}.
3. ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಕ ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾದರೆ, ಅದನ್ನು ಒಂದು ಸಾರಿ ಮಾತ್ರ ಬರೆದರೆ ಸಾಕು.
   F = {1,2,3,4 } ಮತ್ತು {1,2,3,3,4,4} ಎರಡೂ ಒಂದೇ.

ಈಗ X = {x: x ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು 2<x<10} ಆಗಿರಲಿ.

ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1,3,5,7,9,11,13....

ಆದರೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ X ನಲ್ಲಿರುವ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, 2 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿರಬೇಕು X = {3, 5, 7,9}.

ಇಲ್ಲಿ 3 ಎಂಬುದು X ನ ಒಂದು ಗಣಾಂಶ. ಮತ್ತು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ 3 ∈ X ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

11 ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಕೂಡಾ, ಅದು X ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಲ್ಲ. 11 ∉ X.

1900 ಮತ್ತು 2000 ಈ ವರ್ಷಗಳು ಅಧಿಕ ವರ್ಷಗಳೆ?

1900 ನ್ನು 4 ಮತ್ತು 100 ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಬಹುದು.

∴ 1900 –> ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲ.

2000 ನ್ನು 4 ಮತ್ತು 400 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು.

∴ 2000 – > ಅಧಿಕ ವರ್ಷ.

1900 ∉ {ಅಧಿಕ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲ} ಮತ್ತು 2000 ∈ {ಅಧಿಕ ವರ್ಷಗಳು}

E = {1, 4, 9, 16...} ಗಣವನ್ನು ನೋಡಿ, ಇಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ X ಗಣದಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಬಹುದು. (= 4)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :

ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಿದ್ದಾಗ (ಎಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ) ಅದು 'ಸೀಮಿತ ಗಣ' ಅಥವಾ 'ಪರಿಮಿತ ಗಣ'. ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಣಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಅದು 'ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ' ಅಥವಾ 'ಅನಂತ ಗಣ'.

ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶವಿಲ್ಲದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?

Y = {ಚಂದ್ರನಲ್ಲಿರುವ ಮನುಷ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದಿಲ್ಲ. ಮನುಷ್ಯರೇ ಇಲ್ಲ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ}

Z = {z : z ಎಂಬುದು 8 ಮತ್ತು 10 ರ ನಡುವಿನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ}

ಈ ಎರಡೂ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶಗಳಿಲ್ಲ.

ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶಗಳಿಲ್ಲದ ಗಣವನ್ನು 'ಖಾಲಿ ಗಣ' ಅಥವಾ 'ಶೂನ್ಯ ಗಣ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನ { } ಅಥವಾ ϕ (ಫೈ) ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಗಮನಿಸಿ:

{0} ಇದು ಶೂನ್ಯ ಗಣವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ '0' ಇದು ಒಂದು ಗಣಾಂಶ.

P = {ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು}

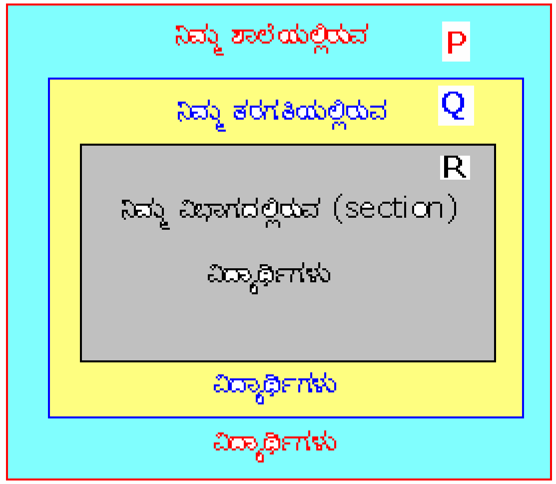
Q = {ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು}

R = {ನಿಮ್ಮ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು}

ಈ ಮೂರು ಗಣಗಳೊಳಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೆ?

1) 'ನಿಮ್ಮ ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು' 'ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೇ' ಆಗಿದ್ದಾರೆ. 'ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು' 'ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೇ' ಆಗಿದ್ದಾರೆ.

2) P ಗಣದಲ್ಲಿ Q ಗಣಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ. Q ಗಣದಲ್ಲಿ R ಗಣಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ.



P ಯು Q ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು, Q ವು R ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು. { $P > Q > R$ ಅಥವಾ $R < Q < P$ }

Q ಗಣವು P ಗಣದ ಉಪಗಣ, R ಗಣವು Q ಗಣದ ಉಪಗಣ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ, $Q \subset P$ ಮತ್ತು $R \subset Q$

$\subset$ ನ್ನು 'ಉಪಗಣ' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. ಮಾತೃಗಣ P ಯನ್ನು Q ಮತ್ತು R ಗಣಗಳ 'ವಿಶ್ವಗಣ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : A ಮತ್ತು B ಗಳು ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿದ್ದು, B ಯ ಪ್ರತೀ ಗಣಾಂಶವೂ A ಯ ಗಣಾಂಶವೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, B ಯನ್ನು A ಗಣದ 'ಉಪಗಣ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಂಕೇತ ರೂಪದಲ್ಲಿ $B \subset A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಮೂಲಗಣದಿಂದ ಇತರ ಗಣಗಳ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದರೆ, ಆ ಮೂಲಗಣವನ್ನು 'ವಿಶ್ವಗಣ' (U) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವಿಶ್ವಗಣದಲ್ಲಿ ಅದರ ಉಪಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣಗಳ ಗಣಾಂಶಗಳು ವಿಶ್ವಗಣದಿಂದ ಪಡೆದವುಗಳೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

X= {1,3,5,7}
ಹಾಗಾದರೆ {3,5,7,1} ಈ ಗಣವು X ಗಣದ ಉಪಗಣವೇ? ಹೌದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಶೂನ್ಯಗಣ? ಶೂನ್ಯಗಣದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶಗಳಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಅದು ಎಲ್ಲಾ ಗಣಗಳ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರತಿ ಗಣವೂ ಅದೇ ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. $A \subset A$

ಶೂನ್ಯಗಣವು ಎಲ್ಲಾ ಗಣಗಳ ಉಪ ಗಣ: $\phi \subset$ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಗಳು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದೇ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗಣವನ್ನು 'ಏಕಾಂಶಗಣ'ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

P = {ಸಮ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ}={2}, X = {ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ= 0},
Y= {ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ=1} :
ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಏಕಾಂಶಗಣಗಳು.

Q = ϕ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ ϕ ಯು Q ದ ಒಂದು ಉಪಗಣ. (ಗಣದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉಪಗಣ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ.)

P = {p, q} ಆಗಿರಲಿ.

$P_0 = \phi$, P_1 = {p}, P_2 = {q}, P = {p, q}, ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ P ಯ ಉಪಗಣಗಳು, (ಗಣದಲ್ಲಿ 2 ಗಣಾಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಆ ಗಣಕ್ಕೆ 4 ಉಪಗಣಗಳಿರುತ್ತವೆ.)

A = {a, b, c} ಆಗಿರಲಿ.

$A_0 = \phi$, A_1 = {a}, A_2 = {b} A_3 ={C}, A_4 = {a, b}, A_5 = {b, c}, A_6 ={c, a} A = {a, b, c}:
ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ A ಯ ಉಪಗಣಗಳು. (ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ 3 ಗಣಾಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ 8 ಉಪಗಣಗಳಿರುತ್ತವೆ.)