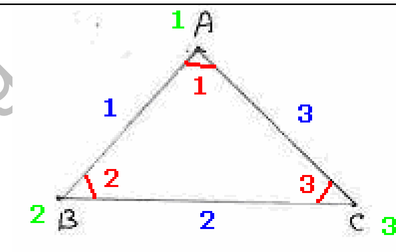
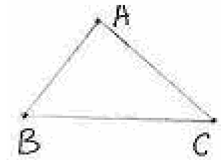
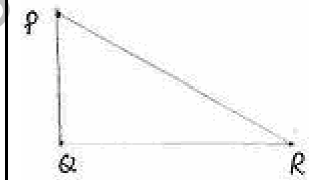
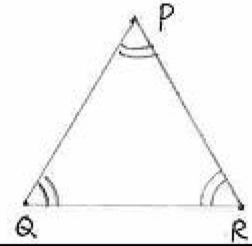
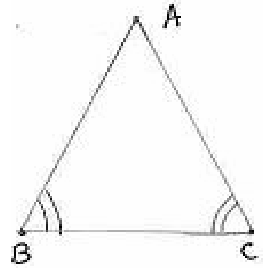
6.4 ತ್ರಿಕೋನಗಳು:

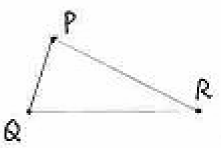
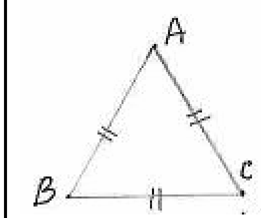
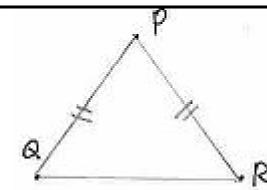
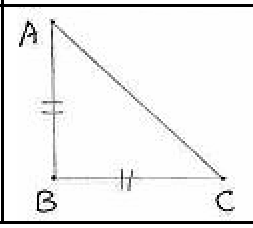
6.4.1 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳು:

ತ್ರಿಕೋನ = ತ್ರಿ+ಕೋನ = ಮೂರು ಕೋನಗಳು. ತ್ರಿಭುಜ = ತ್ರಿ+ಭುಜ = ಮೂರು ಭುಜಗಳು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಮೂರು ಖಂಡಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಆಕೃತಿಯೇ 'ತ್ರಿಕೋನ' ಅಥವಾ 'ತ್ರಿಭುಜ' ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ: ಮೂರು **ಬಾಹುಗಳಿವೆ** : AB, BC, CA ಮೂರು **ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಿವೆ** : A, B, C ಮೂರು **ಕೋನಗಳಿವೆ**: $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$	

ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಳೆಯಬಹುದಾದದ್ದು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳು ಮಾತ್ರ(ಬಿಂದುವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?)

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಅವುಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ:

ವರ್ಗೀಕರಣ	ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಧ	ಲಕ್ಷಣ	ಉದಾಹರಣೆ ಚಿತ್ರ
ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ	ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ	ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವೂ 90^0 ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ.	
	ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ	ಒಂದು ಕೋನವು 90^0 $\angle PQR = 90^0$	
	ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ	ಒಂದು ಕೋನವು 90^0 ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು (ವಿಶಾಲಕೋನ) $\angle BCA > 90^0$	
	ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ	ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ $\angle PQR = \angle QRP = \angle RPQ = 60^0$	
	ಸಮದ್ವಿಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ	ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ $\angle ABC = \angle BCA$	

ವರ್ಗೀಕರಣ	ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಧ	ಲಕ್ಷಣ	ಉದಾಹರಣೆ ಚಿತ್ರ
ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ	ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನ	ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆ ಭಿನ್ನ $PQ \neq QR \neq RP$	
	ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನ (ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವು ಹೌದು)	ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ $AB=BC=CA$	
	ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನ (ಸಮದ್ವಿಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವು ಹೌದು)	ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮ $PQ=PR$	
	ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ	ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ 2 ಬಾಹುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ. $\angle ABC = 90^0$, $AB=BC$	

ನಮಗೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

6.4.1 ಪ್ರಮೇಯ 1: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0.

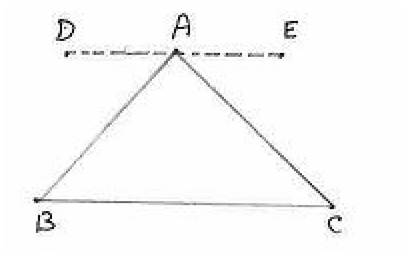
ದತ್ತ: ABC ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ.

ಸಾಧನೀಯ: $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^0$

ರಚನೆ: A ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ, BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ DE ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನೆಳೆದಿದೆ.

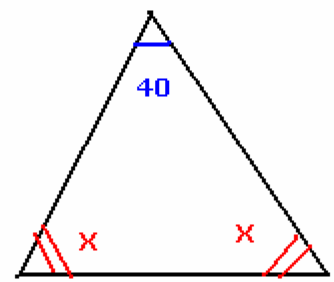
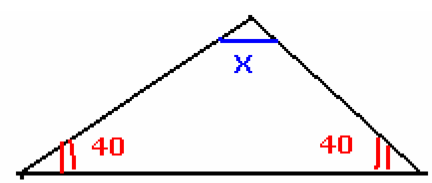
ಸಾಧನೆ:

ಸಂ.	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\angle DAB = \angle ABC$	DE || BC, AB ಛೇದಕರೇಖೆ, ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು.
2	$\angle EAC = \angle ACB$	DE || BC, AC ಛೇದಕರೇಖೆ, ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು.
3	$\angle DAB + \angle BAC + \angle EAC = 180^0$	ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಕೋನಗಳು.
4	$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^0$	3 ರಲ್ಲಿ $\angle DAB$ ಗೆ $\angle ABC$ ಯನ್ನು $\angle EAC$ಗೆ $\angle ACB$ ಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ.



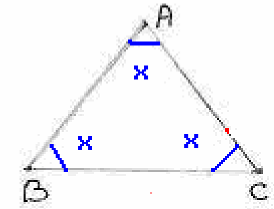
6.4.1 ಸಮಸ್ಯೆ 1: ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನ 40^0 ಆದರೆ ಉಳಿದೆರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (ಮುಂದೆ ಪಾಠ 6.4.3 ರಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಿದ್ದೇವೆ). ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0. ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ:

1). ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಿರುವ ಪ್ರತೀ ಕೋನ x ಆಗಿರಲಿ. ಮೂರನೇ ಕೋನ 40^0 ಆಗ, $x + x + 40^0 = 180^0$ $2x = 180^0 - 40^0 = 140^0$ $\therefore x = 70^0$ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು: 70^0, 70^0 ಮತ್ತು 40^0.	
2) ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಿರುವ ಪ್ರತೀ ಕೋನ 40^0 ಆಗಿರಲಿ. ಮೂರನೇ ಕೋನ x ಇರಲಿ. ಆಗ, $40^0 + 40^0 + x = 180^0$ $80^0 + x = 180^0$ $\therefore x = 100^0$ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು: 40^0,40^0 ಮತ್ತು 100^0.	

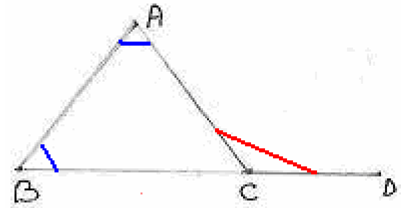
6.4.1 ಸಮಸ್ಯೆ 2: ಸಮಕೋನೀಯ (ಸಮಬಾಹು) ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿ.

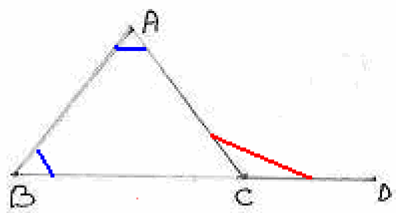
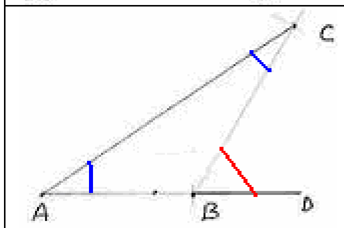
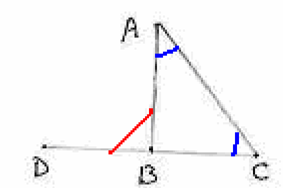
ಪರಿಹಾರ:

ಒಂದು ಸಮಕೋನೀಯ (ಸಮಬಾಹು) ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ. ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಕೋನ x ಆಗಿದ್ದರೆ, $x + x + x = 180^0$ $\therefore 3x = 180^0$ $\therefore x = 60^0$.	

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:

ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ, ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು 'ಬಹಿರ್‌ಕೋನ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle$ACD ಯು ಬಹಿರ್‌ಕೋನ. ಬಹಿರ್‌ಕೋನದ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನದ ಎದುರು, ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು 'ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು' ಎನ್ನುವರು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle$BAC ಮತ್ತು $\angle$ABC ಗಳು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು



ಚಿತ್ರ	ಬಹಿರ್‌ಕೋನ	ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನ
	$\angle$ACD ಇಲ್ಲಿ ಬಹಿರ್‌ಕೋನವು ವಿಶಾಲಕೋನವಾಗಿದೆ ($\angle$ACD > 90^0)	$\angle$BAC ಮತ್ತು $\angle$ABC
	$\angle$CBD ಇಲ್ಲಿ ಬಹಿರ್‌ಕೋನವು ಲಘುಕೋನವಾಗಿದೆ ($\angle$CBD < 90^0)	$\angle$BAC ಮತ್ತು $\angle$ACB
	$\angle$ABD ಇಲ್ಲಿ ಬಹಿರ್‌ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ ($\angle$ABD =90^0)	$\angle$BAC ಮತ್ತು $\angle$BCA

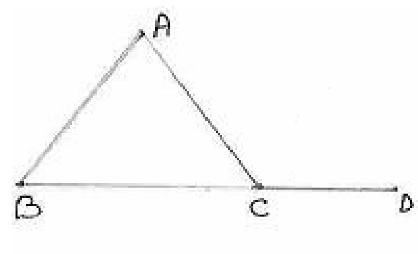
ಗಮನಿಸಿ: ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ 3 ಬಾಹುಗಳಿರುವುದರಿಂದ, ಮೂರು ಬಹಿರ್‌ಕೋನಗಳಿರುತ್ತವೆ.

6.4.1 ಪ್ರಮೇಯ 2: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಬಹಿರ್‌ಕೋನವು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

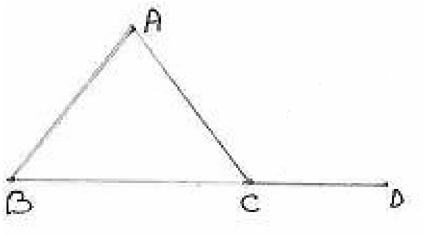
ದತ್ತ: ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ BC ಬಾಹುವನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

ಸಾಧನೆ:

ಸಂ.	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು	
1	$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB = 180^0$	ಪ್ರಮೇಯ : ತ್ರಿಕೋನದ 3 ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ= 180^0	
2	$\angle BCA+\angle ACD = 180^0$	ಸರಳಯುಗ್ಮ ಕೋನಗಳು	
3	$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB = \angle BCA+\angle ACD$	ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ 1	
4	$\angle ABC + \angle CAB= \angle ACD$	ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ 2 $\angle BCA$ ಯನ್ನು ಕಳೆದಿದೆ.	

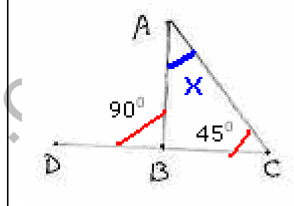
ಗಮನಿಸಿ:



ಸಂ.	**ಮೇಲಿನೆರಡು ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಉಪ ಪ್ರಮೇಯಗಳು**	**ಕಾರಣಗಳು** (x,y,z ಗಳು ತ್ರಿಕೋನದ 3 ಕೋನಗಳಾಗಿರಲಿ)
1	ಬಹಿರ್ಕೋನವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಕ್ಕಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದು.	ಬಹಿರ್ಕೋನ= x+y x,y > 0 ಆದಾಗ, x+y >x, x+y > y
2	ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಲಂಬ ಕೋನಗಳಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.	x+y+z =180 ಆಗ x ಮತ್ತು y ಗಳೆರಡೂ 90 ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.
3	ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವಿಶಾಲ ಕೋನಗಳಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.	x>90 ಆದರೆ y+z <90 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
4	ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ 2 ಕೋನಗಳು ಲಘು ಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.	x < 90 ಆದಾಗ, y, z ಗಳೆರಡೂ 90ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.
5	ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಉಳಿದೆರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ = 90^0	x=90 ಆದಾಗ, x+y+z = 180 ಆದ್ದರಿಂದ y+z = 90 ಆಗಿರಲೇಬೇಕು.
6	ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ 2 ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ 2 ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ. ಅವುಗಳ 3ನೇ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.	x+y+z = 180, a+b+c = 180 ಮತ್ತು x=a, y=b ಆದರೆ z =c ಆಗಿರಲೇಬೇಕು.

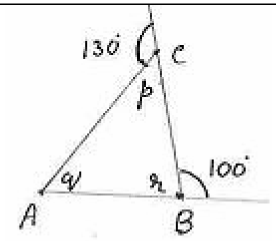
6.4.1 ಸಮಸ್ಯೆ 3: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಬಹಿರ್ಕೋನವು 90^0 ಆಗಿದ್ದು, ಒಂದು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನ 45^0 ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ, ಉಳಿದೆರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಒಂದು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನ 45^0. ಇನ್ನೊಂದು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನ = x ಆಗಿರಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಹಿರ್ಕೋನ = ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $\therefore 90^0 = x+45^0$ $\therefore x = 45^0$.	

6.4.1 ಸಮಸ್ಯೆ 4: ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿ.

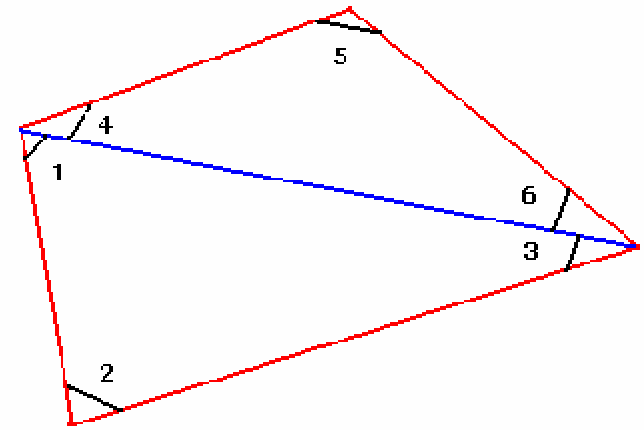
ಪರಿಹಾರ:

$p+q = 100^0$ ------(1) $r+q = 130^0$ ------(2) $p + q + r = 180^0$ ಆಗಿದೆ $\therefore 100^0 + r = 180^0$ $\therefore r = 180^0-100^0=80^0$ ಆದೇಶಗಳಿಂದ $q= 50^0$,$p= 50^0$. ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು 50^0 (=p) 50^0 (=q) ಮತ್ತು 80^0(=r) ಆಗಿವೆ.	

6.4.1ಸಮಸ್ಯೆ 5: ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360^0 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:

ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನೆಳೆದಾಗ,
ಅದು 2 ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.
ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ 3 ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0
$\therefore$ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ
= 2*(ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)
= $2*180^0 = 360^0$



6.4.1 ಸಮಸ್ಯೆ 6: $\triangle ABC$ಯಲ್ಲಿ, $2(\angle A-20) = \angle B+10 = 2(\angle C-10)$ ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$A+B+C = 180$ ಆದ್ದರಿಂದ $B = 180-C-A$

$2(A-20) = B+10$ →(ದತ್ತ)

$\therefore 2A-40 = B+10$

$2A = B+50 = (180-C-A)+50 = 230 - C - A$.

$3A = 230-C$ ------(1)

$2(A-20) = 2(C-10)$ →(ದತ್ತ)

$\therefore A-20 = C-10$

$A = C+10$ -----(2)

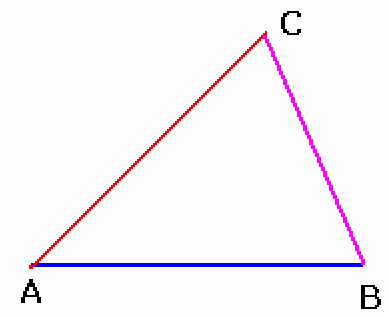
Aಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$3A = 3C+30 = 230-C \therefore 4C = 200 \therefore C = 50$

C ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $A = 60$.

$A+B+C = 180 \quad \therefore B = 70$

$\therefore$ ಕೋನಗಳು: $A = 60, B=70, C=50$.

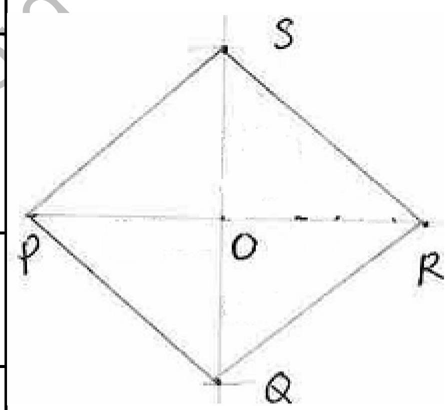


6.4.1 ಸಮಸ್ಯೆ 7: ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದದ್ದು: $\angle POQ = 90^0$.

ಸಾಧನೆ:

ಸಂ.	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\angle SPQ + \angle PQR = 180^0$	PQRS ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ. PS||QR , ಆಗ ಅನುಕ್ರಮ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕ.
2	$\therefore 2(\angle OPQ + \angle PQO) = 180^0$	PO ಮತ್ತು QO ಗಳು ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳು(ದತ್ತ)
3	$\therefore \angle OPQ + \angle PQO = 90^0$	ಹಂತ2
4	$\angle POQ = 180-(\angle OPQ + \angle PQO) = 90^0$	



6.4.2 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆ:

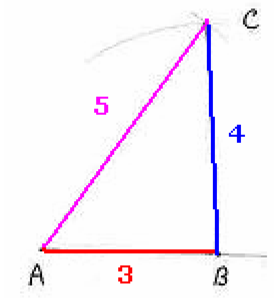
ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳಿವೆ. ಒಟ್ಟು 6 ಅಂಶಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಈ ಆರೂ ಅಂಶಗಳು ಬೇಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಬರೇ ಮೂರು ಅಂಶಗಳು ಸಾಕು. ಆದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದಾದರೂ ಬಾಹು ಆಗಿರಬೇಕು.

6.4.2.1. ಮೂರು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜದ ರಚನೆ:

6.4.2 ಸಮಸ್ಯೆ 1: AB = 3ಸೆಂ.ಮಿ., BC = 4ಸೆಂ.ಮಿ. ಮತ್ತು AC = 5ಸೆಂ.ಮಿ. ಇರುವಂತೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ರಚನಾ ಕ್ರಮ:

ಮೊತ್ತಮೊದಲಿಗೆ ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಕರಡು ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ.

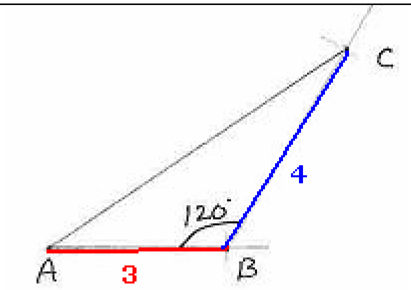
1)3ಸೆಂ.ಮಿ. ಉದ್ದದ **AB** ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ(ಕಂಸದ ಸಹಾಯದಿಂದ) 2) A ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು **5** ಸೆಂ.ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. 3) B ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು **4** ಸೆಂ.ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಮೇಲೆ ಎಳದ ಕಂಸವನ್ನು C ಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಯುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕಂಸವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. 4) **AC** ಮತ್ತು **BC** ಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ. ABC ಯು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಕೋನ.	

6.4.2.2. ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜದ ರಚನೆ

6.4.2 ಸಮಸ್ಯೆ 3: AB = 3ಸೆಂ.ಮಿ., BC = 4ಸೆಂ.ಮಿ., ಮತ್ತು $\angle ABC = 120^0$ ಇರುವಂತೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ರಚನಾಕ್ರಮ:

ಮೊತ್ತ ಮೊದಲಿಗೆ ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಕರಡು ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ.

A ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅಲ್ಲಿಂದ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಳೆದು, **3** ಸೆಂ.ಮಿ ದೂರದಲ್ಲಿ(ಕಂಸದ ಮೂಲಕ) B ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. B ಯಿಂದ ಕೋನಮಾಪಕದ ಮೂಲಕ 120^0 ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಳೆಯಿರಿ. B ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, **4** ಸೆಂ.ಮಿ. ಕಂಸದಿಂದ ಮೇಲಿನ ರೇಖೆನ್ನು C ಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಯಿರಿ. AC ಜೋಡಿಸಿದೆ. ABC ಯು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಕೋನ.	

ಗಮನಿಸಿ: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ 2 ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

6.4.2 ಸಮಸ್ಯೆ 2: ಒಂದು ಮೈದಾನವು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ 2,490 ಮೀಟರ್‌ಗಳು. ಸೂಕ್ತವಾದ ಅಳತೆಗನುಸಾರವಾಗಿ ಮೈದಾನದ ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

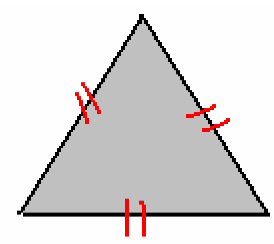
ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಅದರ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ಮೈದಾನವು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಸರ್ವಸಮ.

3*ಬದಿ = 2,490ಮಿ. $\therefore$ ಬದಿ = $\frac{2490}{3}$ = 830 ಮಿ.

ಈಗ 830ಮಿ. ಬದಿಯುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಸೂಕ್ತ ಪ್ರಮಾಣ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವಾ. 100ಮಿ. = 1 ಸೆಂ.ಮಿ. ಆಗ ನಾವು ರಚಿಸಬೇಕಾದ್ದು 8.3 ಸೆಂ.ಮಿ. ಬಾಹುವುಳ್ಳ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು 8.3 ಸೆಂ.ಮಿ., 8.3 ಸೆಂ.ಮಿ. ಮತ್ತು 8.3 ಸೆಂ.ಮಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ: 6.4.2.1(ಹಿಂದಿನ) ಸಮಸ್ಯೆಯಂತೆಯೇ ಈ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



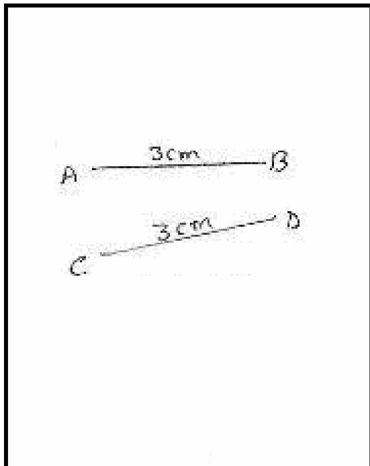
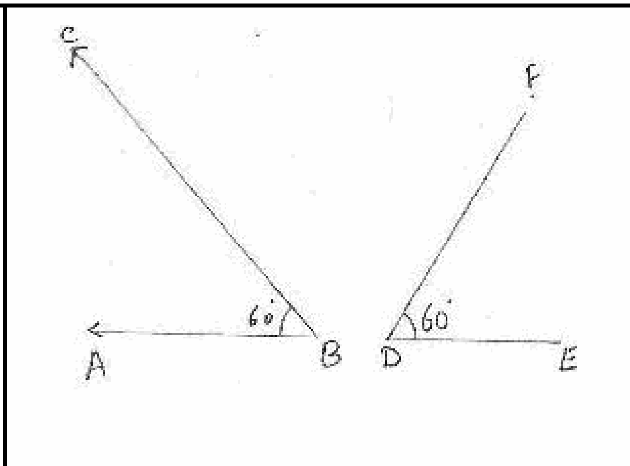
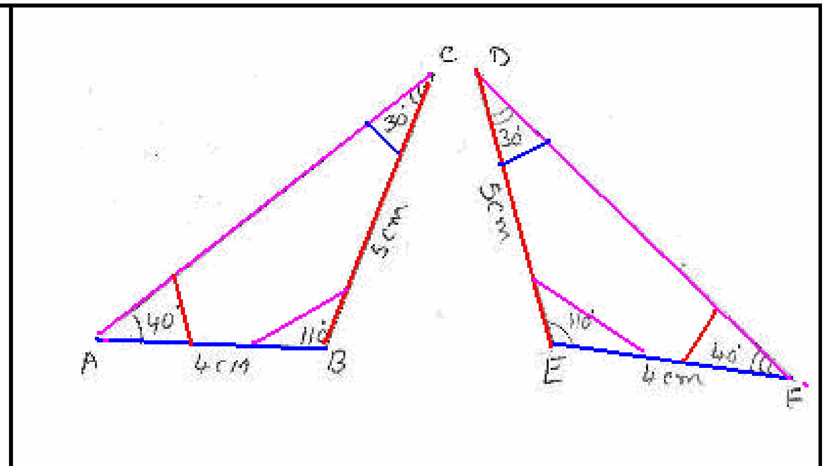
6.4.3 ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ:

ನೀವು ಕೆರೆ, ಕೊಳಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ನೀರಿಗಿಳಿಯದೆ, ಅದರ ಅಗಲವನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆಂದು ಆಲೋಚಿಸಿದ್ದೀರಾ?

ಅದೇ ರೀತಿ, ನೀರಿಗಿಳಿಯದೆ ಒಂದು ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ? ದಿನನಿತ್ಯದ ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರವಿದೆ.

ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಎಲ್ಲಾ ವಿಧದಲ್ಲೂ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(ಎರಡು ರೇಖಾಗಣಿತ ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಒಂದರಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಇಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.)

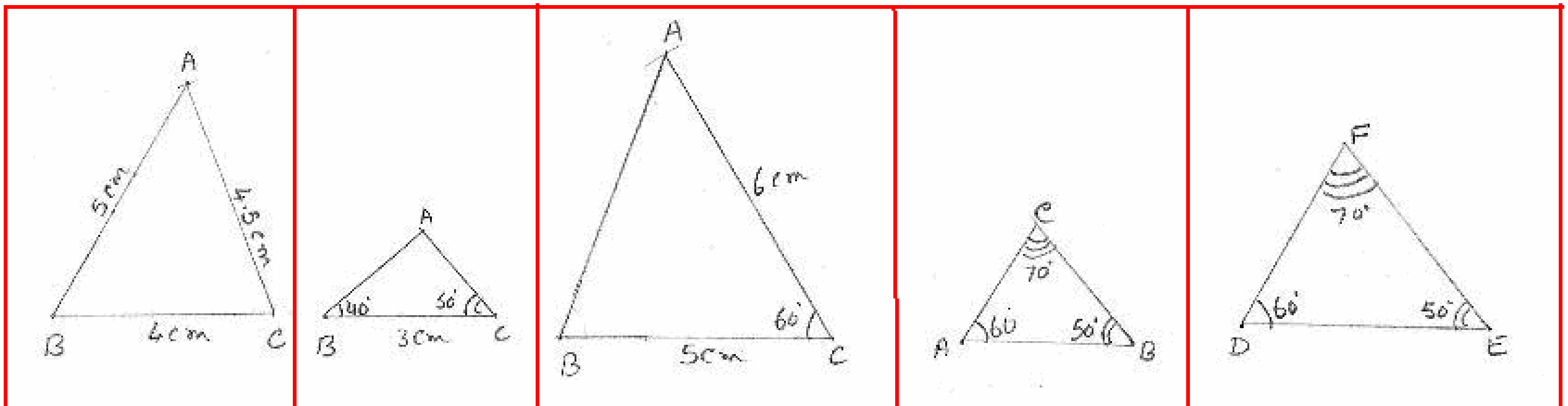
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು
ಚಿತ್ರ 1</td>
<td>ಕೋನಗಳು
ಚಿತ್ರ 2</td>
<td>ತ್ರಿಭುಜಗಳು
ಚಿತ್ರ 3</td>
</tr>
<tr>
<td>ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅವು ಸರ್ವಸಮ.</td>
<td>ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯವುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವು ಸರ್ವಸಮ</td>
<td>ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳೇ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು.ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದರ 3 ಅನುರೂಪಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವು ಸರ್ವಸಮ.</td>
</tr>
<tr>
<td>AB=CD=3ಸೆಂ.ಮಿ.</td>
<td>$\angle ABC = \angle FDE = 60^0$</td>
<td>AC=DF,AB=EF BC=ED, $\angle$CAB = $\angle$EFD, $\angle$ABC=$\angle$DEF, $\angle$ACB=$\angle$EDF</td>
</tr>
</table>

ಗಮನಿಸಿ: ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಸಂಪೂರ್ಣ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಇರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು $\cong$ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

6.4.3 ಉದಾ.1: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 6 ಅಂಶಗಳು (3 ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕೋನಗಳು) ಇದ್ದರೂ ಸಹ, ನಾವೀಗ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೇವಲ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳಿಂದ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವಾ:

1. BC = 4 ಸೆಂ.ಮಿ., CA = 4.5 ಸೆಂ.ಮಿ., BA= 5 ಸೆಂ.ಮಿ.
2. BC = 3 ಸೆಂ.ಮಿ., $\angle ABC = 40^0$, $\angle BCA = 50^0$
3. BC = 5 ಸೆಂ.ಮಿ., CA=6 ಸೆಂ.ಮಿ., $\angle BCA = 60^0$

4,5. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು 60^0, 50^0, 70^0



ಚಿತ್ರ 1 | ಚಿತ್ರ 2 | ಚಿತ್ರ 3 | ಚಿತ್ರ 4 | ಚಿತ್ರ 5

ಗಮನಿಸಿ: ತ್ರಿಕೋನದ 3 ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ನಾವು ಹಲವಾರು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು:
(ಚಿತ್ರ 4 ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 5 ರಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೂ ಸಹ, AB $\neq$ DE, BC $\neq$ FE, AC $\neq$ DF)

ತೀರ್ಮಾನ: ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಅಂಶಗಳಿಂದ ನಾವು ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

1. ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು
2. ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು 2 ಕೋನಗಳು
3. ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ.

ತಃಖ್ತೆ A: ನಾವು ಕಂಡುಕೊಂಡ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು:

ಬಾಹು	ಬಾಹು	ಬಾಹು	ಕೋನ	ಕೋನ	ಕೋನ	ಫಲಿತಾಂಶ
Y	Y	Y	-	-	-	ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.
Y	-	-	Y	Y	-	ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.
Y	Y	-	Y	-	-	ದತ್ತ ಕೋನವು ದತ್ತ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.
-	-	-	Y	Y	Y	ಹಲವಾರು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು (ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ)

ಗಮನಿಸಿ:

1. ತ್ರಿಕೋನದ 3 ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0. ಆದ್ದರಿಂದ 2 ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ 3 ನೇ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.
2. ಸರ್ವಸಮತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಲು ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ 3 ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. ಆದರೆ ನಾವು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಏಕೈಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲು 6 ಅಂಶಗಳು ಬೇಕಿಲ್ಲ, ಬರೇ 3 ಅಂಶಗಳು ಸಾಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ನೋಡಿದಂತೆ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಒಂದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯ **ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. (ಬಾಹು, ಕೋನ, ಬಾಹು)** ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

6.4.3 ಸಮಸ್ಯೆ 1: ಕೆಳಗಿನ ಕೊಳದ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಕೊಳದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕಂಬಗಳನ್ನು (A, B ಗಳು) ಸ್ಥಾಪಿಸಿ. ಕೊಳದ ಎದುರು ಭಾಗದಲ್ಲಿ A, B ಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುವಂತೆ C ಕಂಬವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ.

AC=CE ಆಗುವಂತೆ AC ಯನ್ನು E ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ.

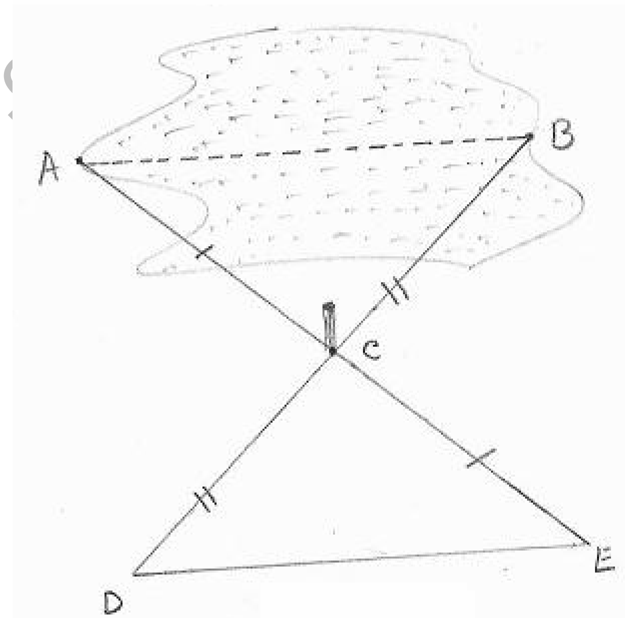
BC=CD ಆಗುವಂತೆ BC ಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ.

ಆಗ $\angle ACB = \angle DCE$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಆಗ, ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧದಂತೆ, $ABC \cong DEC$

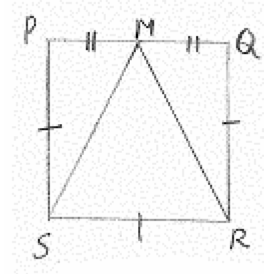
$\therefore AB=DE$

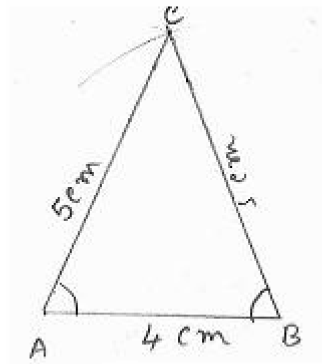
DEಯ ಉದ್ದವು ಕೊಳದ ಅಗಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.



6.4.3 ಸಮಸ್ಯೆ 2: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ PQRS ಒಂದು ವರ್ಗ PQ ದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು M ಆದರೆ, SM=RM ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

PQRS ಒಂದು ವರ್ಗ. ಆದ್ದರಿಂದ PS=QR, $\angle SPQ = 90^0$, $\angle PQR = 90^0$ ($\angle SPQ = \angle PQR$) PQದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು M ಆದ್ದರಿಂದ, PM=MQ. ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನ SPM ಮತ್ತು MQRಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, SPM $\cong$ MQR ತ್ರಿಕೋನಗಳ 3 ನೇ ಬಾಹುಗಳು SM ಮತ್ತು MR ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ.	

ಚಟುವಟಿಕೆ: AB=4 ಸೆಂ.ಮಿ., AC=BC=5 ಸೆಂ.ಮಿ. ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ. $\angle$CAB ಮತ್ತು $\angle$ABCಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ನೀವೇನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? $\angle CAB = \angle ABC$? **ಫಲಿತಾಂಶ:** ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ 2 ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಈಗ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸುವಾ.	

6.4.3 ಪಾದ – ಕೋನ ಪ್ರಮೇಯ:

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

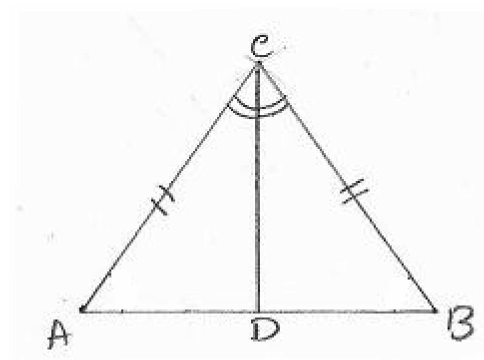
ದತ್ತ: ΔABC ಯಲ್ಲಿ $AC=BC$

ಸಾಧನೀಯ: $\angle CAB = \angle ABC$

ರಚನೆ: $\angle ACB$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಅದು AB ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

ಸಾಧನೆ:

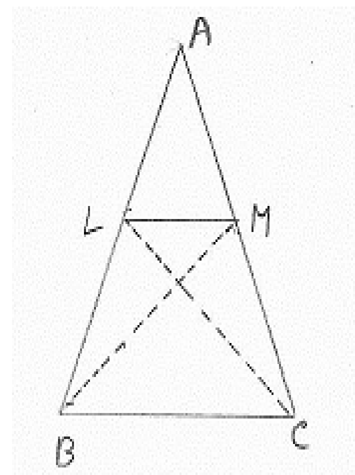
ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$AC=BC$	ದತ್ತ
2	$\angle ACD=\angle BCD$	CD ಯು $\angle ACB$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆ.
3	CD ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು	ΔACD ಮತ್ತು ΔDCB ಗಳಿಗೆ
4	$\Delta ACD \cong \Delta BCD$	ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ
5	$\angle CAB= \angle ABC$	ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು.



6.4.3 ಸಮಸ್ಯೆ 3: ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB=AC. AL=AM ಆಗುವಂತೆ L ಮತ್ತು M ಗಳು AB ಮತ್ತು AC ಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು. $\angle ALM = \angle AML$, $\triangle ABM \cong \triangle ACL$ ಮತ್ತು $\triangle LCB \cong \triangle MBC$, LM||BC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	AL=AM	ದತ್ತ
2	BL = CM	AB=AC(ದತ್ತ), (1)
3	$\angle ALM = \angle LMA$	ಪಾದಕೋನ ಪ್ರಮೇಯ
4	AB=AC	ದತ್ತ
5	$\angle BAM$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ	$\triangle ABM$, $\triangle ACL$ ಗಳಿಗೆ
6	$\triangle ABM \cong \triangle ACL$	ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ (1,5,4)
7	$\angle ABC = \angle BCA$	ಪಾದಕೋನ ಪ್ರಮೇಯ(AB=AC)
8	LB=CM	(1)
9	BC ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು	$\triangle LCB$, $\triangle MBC$ಗಳಿಗೆ
10	$\triangle LCB \cong \triangle MBC$	ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ (2, 7, 9)
11	$2\angle ALM = 180^0 - \angle LAM$	$\angle ALM + \angle LMA + \angle LAM = 180^0$, $\angle ALM = \angle LMA$
12	$2\angle ABC = 180^0 - \angle LAM$	$\angle ABC + \angle BCA + \angle LAM = 180^0$, $\angle ABC = \angle BCA$
13	$\angle ALM = \angle ABC$	(11,12).
14	LM ||BC	ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ(13)



ಚಟುವಟಿಕೆ: ಅನುಕೂಲವಾದ ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಪಾದಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ(30^0 ಮತ್ತು 30^0 ಆಗಿರಲಿ) ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ನೀವೇನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

6.4.3 ಪಾದಕೋನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ: ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

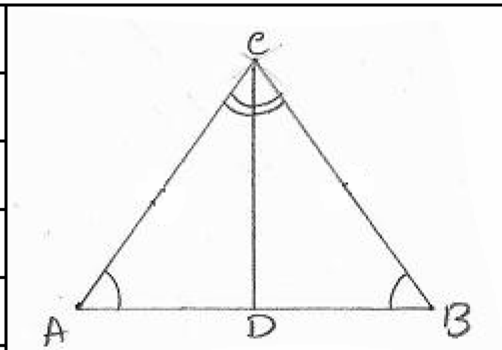
ದತ್ತ: $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ $\angle CAB = \angle ABC$

ಸಾಧನೀಯ: AC=BC

ರಚನೆ: $\angle ACB$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿ. ಈ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯು AB ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದೆ.

ಸಾಧನೆ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\angle CAB = \angle ABC$	ದತ್ತ
2	CD ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು	$\triangle ACD$ ಮತ್ತು $\triangle DCB$ಗಳಿಗೆ
3	$\angle ACD = \angle DCB$	ರಚನೆ
4	$\triangle ACD \cong \triangle DCB$	ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ
5	AC=BC	ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು



6.4.3 ಸಮಸ್ಯೆ 4: ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಪಾದವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

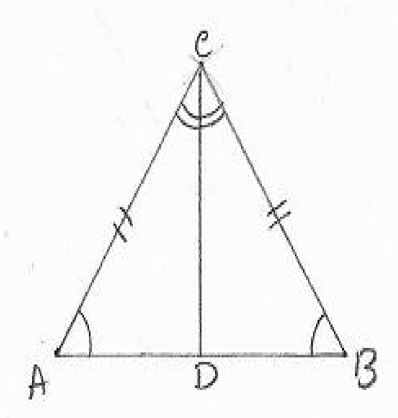
ದತ್ತ: $\triangle ABC$ಯಲ್ಲಿ AC=BC

ಸಾಧನೀಯ: AD=DB ಮತ್ತು $\angle ADC = \angle CDB = 90^0$

ರಚನೆ: $\angle ACB$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಆ ರೇಖೆಯು AB ಯನ್ನು D ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

ಸಾಧನೆ:

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	AC=BC	ದತ್ತ
2	$\angle ACD = \angle BCD$	ರಚನೆ
3	CDಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು	$\triangle ACD$ ಮತ್ತು $\triangle DCB$ ಗಳಿಗೆ
4	$\triangle ACD \cong \triangle DCB$	ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ
5	AD=DB	ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು
6	$\angle ADC = \angle CDB$	ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು
7	$\angle ADC + \angle CDB = 180^0$	ಸರಳಯುಗ್ಮ ಕೋನಗಳು
8	$\angle ADC = \angle CDB = 90^0$	



ಚಟುವಟಿಕೆ: ಬಾಹುಗಳು 4ಸೆಂ.ಮಿ., 5ಸೆಂ.ಮಿ., ಮತ್ತು 6ಸೆಂ.ಮಿ. ಇರುವಂತೆ ಕೆಲವು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ನೀವೇನನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ? ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, **"ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮ".** ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನ **ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. (ಬಾಹು, ಬಾಹು, ಬಾಹು)** **ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ** ಎನ್ನುವರು.

6.4.3 ಸಮಸ್ಯೆ 5: PQRS ಒಂದು ವರ್ಗ. A, B, C, D ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ PQ, QR, RS ಮತ್ತು SP ಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು. $\angle BAC = \angle BCA$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:

PQRS ಒಂದು ವರ್ಗ. ಆದ್ದರಿಂದ PQ = SR. A ಮತ್ತು C ಗಳು PQ ಮತ್ತು SRಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು. $\therefore$ AQ=CR.

B ಯು QR ನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು $\therefore$ QB=BR.

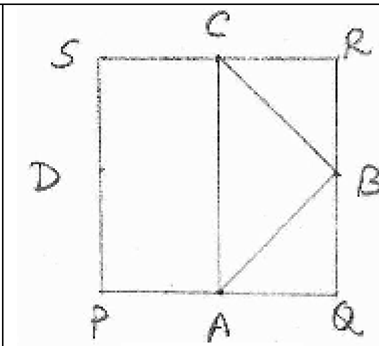
PQRS ಒಂದು ವರ್ಗ $\therefore \angle AQB = 90^0 = \angle BRC$

$\triangle AQB \cong \triangle CRB$ ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ.

$\therefore$ AB=BC .... ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನದ ಅನುರೂಪಬಾಹುಗಳು

$\therefore \triangle CBA$ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನ.

ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ, ಸಮನಾದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮ. $\therefore \angle BAC = \angle BCA$



ಚಟುವಟಿಕೆ: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ 2 ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹುವು (60^0,70^0 ,4ಸೆಂ.ಮಿ. ಆಗಿರಲಿ) ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ 2 ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿ ಇರುವಂತೆ ಕೆಲವು ಜೊತೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ನೀವೇನನ್ನ ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಪ್ರತೀ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಯಾವುದೇ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಏಕೈಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ ನಾವು ಹೀಗೆ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು:
"ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ 2 ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅನುರೂಪಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ". ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು **ತ್ರಿಕೋನದ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. (ಕೋನ, ಬಾಹು, ಕೋನ) ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ** ಎನ್ನುವರು.

ಉಪನಿಬಂಧನೆ:

"ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಾಹು, ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪವಾದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ". ಇದನ್ನು **ಕೋನ, ಕೋನ, ಬಾಹು (ಕೋ.ಕೋ.ಬಾ) ನಿಬಂಧನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.**

“ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತೊಂದು ಅನುರೂಪವಾದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ”

ಸಾಧನೆ:

1) ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $=180^0$

2) ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ 3 ನೇ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು
($=180^0 - 2$ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

3) ಮೂರು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ 2 ಕೋನಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆಗ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವು ಸಮವಾಗುವುದರಿಂದ ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದ ರೀತ್ಯಾ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆ.

6.4.3 ಸಮಸ್ಯೆ 6: ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು:

ಪರಿಹಾರ:

ನದಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ದಡದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಥಿರವಾದ ವಸ್ತು (ಮರ) B ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ನೀವು ನಿಂತ ಈಚೆ ದಡದಲ್ಲಿ B ಗೆ ಎದುರಾಗಿ A ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿ. A ಯಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ದಡದ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕಂಬ C ಯನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿ.

C ಯಿಂದ AC ಯಷ್ಟೇ ದೂರದಲ್ಲಿ D ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿ.

(C ಯು AD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು).

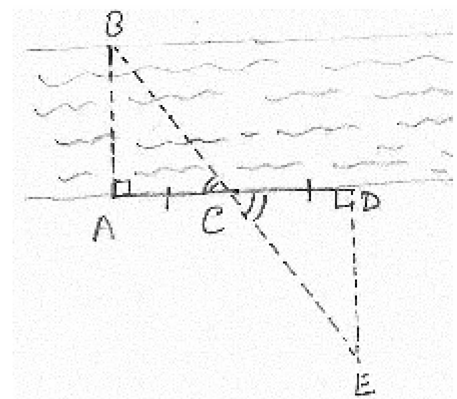
AD ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ, B,C ಮತ್ತು E ಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ E ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿ. ಆಗ

1) $\angle BAC = 90^0 = \angle CDE$ (BA ಮತ್ತು DE, ADಗೆ ಲಂಬವಾಗಿವೆ.)

2) AC=CD (ರಚನೆ)

3) $\angle ACB = \angle DCE$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನ)

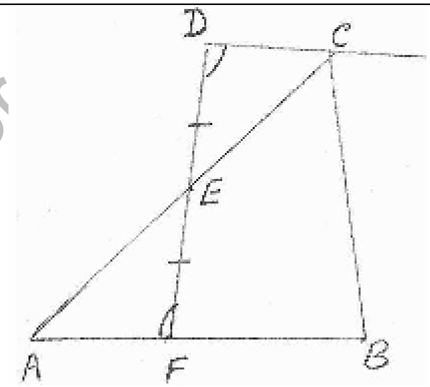
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC$ ಕೋ.ಬಾ.ಕೊ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ $\therefore$ AB=DE



DE ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯುವುದರಿಂದ, ನೀರಿಗಿಳಿಯದೇ ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

6.4.3 ಸಮಸ್ಯೆ 7: ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AC ಯು DF ನ್ನ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು $\angle EDC = \angle AFE$ ಆದರೆ, AE=EC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle AEF = \angle DEC$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನ) DE=EF, $\angle EDC = \angle AFE$ (ದತ್ತಾಂಶಗಳು) $\Delta AEF \cong \Delta DEC$ ಕೋ.ಬಾ.ಕೊ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ $\therefore$ AE=EC ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅನುರೂಪಬಾಹುಗಳು	

ತಃಖ್ತೆ: ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು

ಬಾಹು	ಬಾಹು	ಬಾಹು	ಕೋನ	ಕೋನ	ಕೋನ	ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ
Y	Y	Y	-	-	-	**ಬಾ.**ಬಾ.ಬಾ.
Y	-	-	Y	Y	-	ಕೋ.**ಬಾ.**ಕೋ.
Y	Y	-	Y	-	-	**ಬಾ.**ಕೋ.ಬಾ.

ಗಮನಿಸಿ: ಮೇಲಿನ ತಃಖ್ತೆ ಗಮನಿಸಿ. ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಆಗಲು ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಬಾಹುವಾದರೂ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

6.4.3 ಅಭ್ಯಾಸ: ಮೇಲಿನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ರಚನೆಯ ಕ್ರಮಗಳು ಸರಿಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ: (ಪಾಠ 6.1 ರಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವುದನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕಲಿತಿದ್ದೆವು).

1) ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯುವುದು.

2) ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯುವುದು.

3) ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನೆಳೆಯುವುದು.

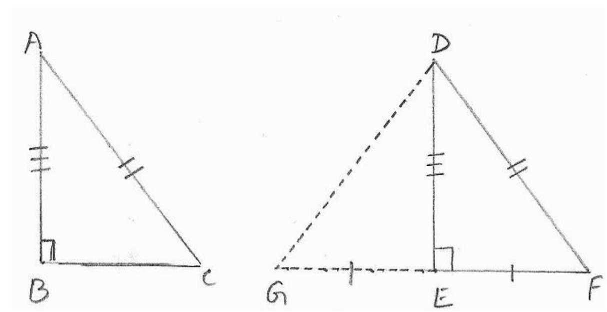
6.4.3 ಪ್ರಮೇಯ: ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು, ಮತ್ತೊಂದರ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪವಾದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ.

ದತ್ತ: $\triangle ABC$ ಮತ್ತು $\triangle DEF$ ಗಳು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು($\angle ABC = \angle DEF = 90^0$) AB=DE, AC=DF

ಸಾಧನೀಯ: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

ರಚನೆ: FE ಯನ್ನು GE=BC ಆಗುವಂತೆ G ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. DG ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿದೆ.

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	AB=DE	ದತ್ತ
2	$\angle ABC = \angle DEF = 90^0$	ದತ್ತ
3	$\angle ABC = \angle DEG = 90^0$	$\angle DEG + \angle DEF = 180^0$
4	BC=GE	ರಚನೆ
5	$\triangle ABC \cong \triangle DEG$	ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.(1,3,4)
6	$\angle ACB = \angle DGE$	ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು
7	DG=AC	ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು
8	AC=DF	ದತ್ತ
9	DG=DF	(7, 8)
10	DE ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು.	$\triangle DEF$ ಮತ್ತು $\triangle DEG$ ಗಳಿಗೆ
11	$\angle DEG = \angle DEF = 90^0$	ರಚನೆ
12	$\angle DFE = \angle DGE$	$\triangle GDF$ ಗೆ ಪಾದ–ಕೋನ ಪ್ರಮೇಯ
13	$\angle GDE = \angle EDF$	$\angle GDE = 180^0 - \angle DEG - \angle DGE = 180^0 - \angle DEF - \angle DFE = \angle EDF$
13	$\triangle DEG \cong \triangle DEF$	ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. (13, 10, 11)
14	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	(5,13)



ಇದನ್ನು **ಲಂ.ಕ.ಬಾ. (ಲಂಬ ಕೋನ, ಕರ್ಣ, ಬಾಹು) ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ** ಎಂತಲೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

6.4.3 ಸಮಸ್ಯೆ 8: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಎತ್ತರಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ. ಅದು ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: (ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರಗಳು). ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ EC,BF ಮತ್ತು AD ಗಳು ಎತ್ತರಗಳು.

ಹಂತ	ನಿರೂಪಣೆ	ಕಾರಣಗಳು
1	$\triangle$ BEC ಮತ್ತು $\triangle$ BFCಗಳಲ್ಲಿ	
2	EC=BF	ಎತ್ತರಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ (ದತ್ತ)
3	$\angle BEC = \angle BFC = 90^0$	BE ಮತ್ತು BF ಗಳು ಲಂಬಗಳು
4	BC ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು	
5	$\triangle BEC \cong \triangle BFC$	ಲಂ.ಕ.ಬಾ.ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ
6	$\angle ABC = \angle BCA$	ಅನುರುಪ ಕೋನಗಳು
7	$\triangle$ ADB ಮತ್ತು $\triangle$ ADCಗಳಲ್ಲಿ	
8	$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$	AD ಯು ಎತ್ತರ
9	AD ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು	
10	$\angle ABC = \angle BCA$	(6)
11	$\triangle ADB \cong \triangle ADC$	ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ
12	AB =AC	ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು
13	BC= AC	ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿದಂತೆಯೇ $\triangle BFC \cong \triangle BFA$.
14	AB=AC=BC	(2,13)